

Técnicas informáticas de imagen y sonido

Vicente González Ruiz

Depto de Arquitectura de Computadores y Electrónica

vruiz@ual.es

<http://www.ace.ual.es/~vruiz/docencia>

14 de mayo de 2009

Contenidos

I	Percepción audio-visual	1
1.	Percepción auditiva	2
1.1.	El sonido	3
1.1.1.	Las ondas sonoras	3
1.1.2.	Representación temporal del sonido	5
1.1.3.	Representación frecuencial del sonido	6
1.1.4.	Análisis frecuencial de las notas musicales	7
1.1.5.	Una clasificación de las ondas sonoras	8
1.1.6.	Intensidad de las ondas sonoras	9
1.2.	El sistema auditivo humano	12
1.2.1.	El oído externo	13
1.2.2.	El oído medio	14
1.2.3.	El oído interno	18
1.2.4.	La transmisión ósea	22
1.3.	Percepción del sonido	23

1.3.1.	Percepción de la intensidad sonora	24
1.3.2.	El umbral de audición	25
1.3.3.	Resolución frecuencial	26
1.3.4.	Enmascaramiento simultáneo	28
1.3.5.	Resolución temporal	31
1.3.6.	Enmascaramiento temporal	33
1.3.7.	Escucha binaural	34
1.4.	Sistemas de captura y reproducción de audio	35
1.4.1.	El micrófono y el altavoz	36
1.4.2.	Tipos de micrófonos y altavoces	37
1.4.3.	Principales características de los micrófonos	39
1.4.4.	Principales características de los altavoces	42
1.4.5.	El amplificador de audio	44
1.4.6.	Funcionamiento de un amplificador	45
1.4.7.	Principales características de los amplificadores de audio	48
1.4.8.	Soportes de almacenamiento	50
1.4.9.	Sistemas de reducción de ruido	51
1.4.10.	Número de canales	53

2. Percepción visual	57
2.1. La luz	58
2.1.1. Las ondas luminosas	58
2.1.2. Las ondas electromagnéticas	59
2.1.3. Intensidad de las ondas luminosas	60
2.1.4. El color de la luz	61
2.2. El sistema visual humano	62
2.2.1. El ojo humano	63
2.2.2. La esclerótida	65
2.2.3. La coroides y el iris	67
2.2.4. El cristalino y el músculo ciliar	69
2.2.5. La cornea y el cristalino	72
2.2.6. El humor acuoso	73
2.2.7. El humor vítreo	74
2.2.8. La retina	75
2.3. Percepción de la luz	81
2.3.1. Percepción de la intensidad lumínica	82
2.3.1.1. La luminancia percibida depende del tiempo de observación	84

2.3.1.2.	La luminancia percibida depende de la zona de la retina impresionada	85
2.3.1.3.	La luminancia percibida depende del nivel de iluminación del contorno	87
2.3.1.4.	La luminancia percibida depende del color de la luz	90
2.3.2.	Otros efectos visuales	92
2.3.3.	La agudeza visual	99
2.3.4.	La persistencia visual	100
2.3.5.	La sensación de movimiento	101
2.3.6.	Enmascaramiento espacial	102
2.3.7.	Enmascaramiento temporal	105
2.4.	Sistemas de captura y reproducción de imágenes	106
2.4.1.	El telescopio	106
2.4.1.1.	El telescopio refractor	107
2.4.1.2.	El telescopio reflector	110
2.4.1.3.	Aumentos	116
2.4.1.4.	Distancia focal	117
2.4.1.5.	Resolución	121

2.4.1.6.	Luminosidad	123
2.4.1.7.	Campo de visión de un telescopio	124
2.4.2.	Objetivos fotográficos	125
2.4.2.1.	Objetivos con focal fija versus objetivos con zoom	126
2.4.2.2.	El enfoque	127
2.4.2.3.	La profundidad de campo	128
2.4.2.4.	El tiempo de exposición	129
2.4.2.5.	El diafragma	131
2.4.2.6.	Los sistemas de estabilización de imagen	134
2.4.3.	La película fotográfica	135
2.4.3.1.	Tipos de película	136
2.4.3.2.	La sensibilidad de la película	137
2.4.4.	El CCD (Charging Couple Device)	139
2.4.5.	Estereoscopía (visión en estéreo)	141
2.4.5.1.	Estereoscopía con dos imágenes independientes	142
2.4.5.2.	Estereocopía con gafas polarizadas	145
2.4.5.3.	Estereogramas con gafas de realidad virtual	146

2.4.5.4.	Estereoscopía con gafas síncronas	147
2.4.5.5.	Estereoscopía con anáglifos	148
2.4.5.6.	Estereoscopía con auto-estereogramas de puntos aleatorios	151
2.4.5.7.	Monitores estéreo	153

II Digitalización de señales 154

3. Análisis de Fourier 155

3.1.	¿Para qué se utiliza?	156
3.2.	La serie trigonométrica de Fourier	157
3.2.1.	Los coeficientes de Fourier	159
3.3.	La serie exponencial de Fourier	162
3.3.1.	Los coeficientes complejos de Fourier	165
3.4.	Representación de una función periódica mediante la serie de Fourier en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$	166
3.5.	El espectro complejo de Fourier	167

3.6.	Representación de una función cualquiera en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$: la transformada de Fourier	169
3.7.	Representación de una señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia	176
3.8.	Los módulos de los espectros de las funciones reales son simétricos	178
3.9.	Transformada de Fourier de la función pulso rectangular	180
4.	Teoría de señales	185
4.1.	La función impulso unitario (delta de Dirac)	186
4.1.1.	Obtención de la función impulso unitario	188
4.2.	Transformada de Fourier de la función impulso unitario	190
4.3.	Transformada de Fourier de la función constante	192
4.4.	Transformada de Fourier de la función exponencial compleja	195
4.5.	Transformada de Fourier de la función seno	197
4.6.	Transformada de Fourier de la función coseno	199
4.7.	Transformada de Fourier de una función periódica	201
4.8.	Transformada de Fourier de un tren de impulsos unitarios equidistantes	204

4.9. Transformada de Fourier de una función desplazada en el tiempo	209
4.10. Transformada inversa de Fourier de una función desplazada en la frecuencia	211
4.11. Convolución de funciones	213
4.12. El teorema de convolución en el dominio del tiempo	222
4.13. El teorema de convolución en el dominio de la frecuencia	225
4.14. Convolución de una función con la función impulso unitario	228
4.15. Convolución con la función impulso unitario desplazada	229
5. Muestreo de señales	231
5.1. ¿Qué es una señal?	232
5.2. ¿Qué obtenemos cuando muestreamos?	233
5.3. El teorema del muestreo uniforme	235
5.4. Ninguna señal finita está limitada en banda	243
5.5. El muestreo de señales finitas	245
5.6. Muestreo de audio	249
5.7. Muestreo de imágenes	250
5.8. Muestreo de vídeo	251

5.9. Algunos Casos Reales	252
6. Cuantificación de señales	254
6.1. Teoría de la cuantificación	255
6.2. Cuantificación lineal	259
6.2.1. SNR del cuantificador lineal	260
6.3. Cuantificación logarítmica	263
6.4. Cuantificación de Max-LLoyd	264
6.5. Cuantificación vectorial	266
6.6. Algunos Casos Reales	268
III Codificación de señales audio-visuales	269
7. Compresión estadística	270
7.1. La compresión estadística	271
7.2. La redundancia estadística	272
7.3. Símbolos, series y cadenas	273
7.4. Compresión de series	274

7.4.1.	RLE (Run Length Encoding)	275
7.4.2.	RLE binario	277
7.4.3.	RLE MNP-5	280
7.5.	Compresión de cadenas	282
7.5.1.	LZ77	283
7.5.2.	LZ78	288
7.5.3.	LZW	293
7.6.	Compresión de símbolos	300
7.6.1.	Bit de dato y bit de información	302
7.6.2.	Entropía de una fuente de información	305
7.6.3.	La codificación de Huffman	306
7.6.4.	Limitaciones del código de Huffman	310
7.6.5.	La codificación aritmética	312
7.6.6.	Modelos probabilísticos	318
7.6.6.1.	Modelos estáticos	319
7.6.6.2.	Modelos adaptativos	320
7.6.6.3.	Modelos inicialmente vacíos	322
7.6.6.4.	Modelos con memoria	325

8. El estándar JPEG	334
8.1. Limitaciones de los compresores de texto	335
8.2. Fuentes de redundancia en las imágenes	338
8.3. La compresión de imágenes	339
8.4. Una medida de la distorsión (PSNR)	340
8.5. El estándar JPEG (ISO/IEC 10918-1)	341
8.5.1. El algoritmo lossless [26]	342
8.5.2. El algoritmo lossy	350
8.5.2.1. RGB \rightarrow YCbCr	351
8.5.2.2. Submuestreo de la crominancia	355
8.5.2.3. $[0, 255] \rightarrow [-128, 127]$	357
8.5.2.4. Aplicar la 2D-DCT por bloques de 8×8 puntos	358
8.5.2.5. Cuantificación escalar	364
8.5.2.6. Codificación entrópica	367
8.5.2.7. Entrelazamiento de las componentes de color	369
8.5.2.8. Transmisión progresiva	377
8.5.3. El algoritmo jerárquico	379
8.6. Evaluación	380

9. El estándar MPEG-1 Vídeo	388
9.1. Tasas de datos y de compresión	389
9.2. Las fuentes de redundancia	391
9.3. Eliminación de la redundancia	392
9.4. El codec MPEG-1	393
9.5. Las etapas DCT, Q, BC y VLC	396
9.6. La etapa ME	397
9.6.1. Imágenes de referencia, predicción y predicha	398
9.6.2. Estimación hacia delante, hacia detrás y bi-direccional	399
9.6.3. Imágenes I, P y B	401
9.6.4. El GOP (Group Of Pictures)	402
9.6.5. Display (time) and bit-stream orders	404
9.6.6. GOP's abiertos y cerrados	406
9.6.7. Estimación de movimiento basada en la búsqueda de bloques	407
9.6.8. Matching criteria	409
9.6.9. Tipos de macrobloques	410
9.6.10. Estrategias de búsqueda	412
9.7. La etapa MC	414

9.8. Codificación de los campos de movimiento	415
9.9. The MPEG-1's data partitioning	418
9.10. Visualización rápida	420
9.11. Evaluación	421

Parte I

Percepción audio-visual

Capítulo 1

Percepción auditiva

1.1. El sonido

1.1.1. Las ondas sonoras

- Las ondas¹ sonoras son ondas mecánicas de presión que transmiten energía mediante la colisión de partículas materiales. Necesitan por tanto, un medio físico para poderse propagar.²

¹Una onda es una oscilación de energía que se propaga en un medio.

²Ver vídeo http://www.ace.ual.es/~{}vruiz/docencia/imagen_y_sonido/teoria/01-Percepcion_auditiva/Ondas.mov.

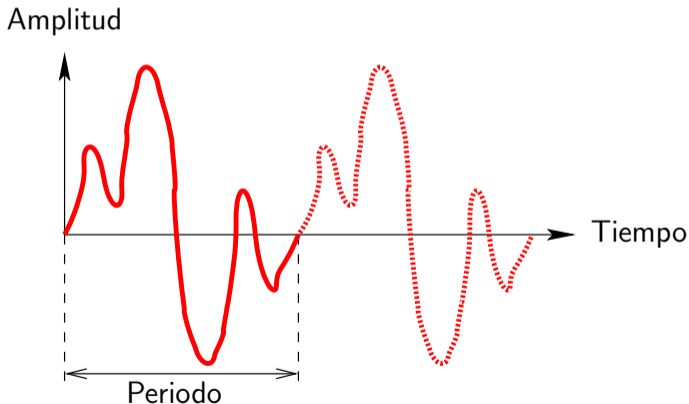
- Las ondas sonoras son longitudinales³ y su velocidad de propagación es proporcional a la elasticidad (o facilidad para la deformación) del medio.

Medio	Velocidad
Aire (0° C)	331 m/s
Aire (20° C)	334 m/s
Oxígeno (0° C)	316 m/s
Hidrógeno (0° C)	1.284 m/s
Plomo (20° C)	1.230 m/s
Agua (15° C)	1.450 m/s
Hierro (20° C)	5.130 m/s
Granito	6.000 m/s

³La dirección de oscilación coincide con la de la propagación de la onda.

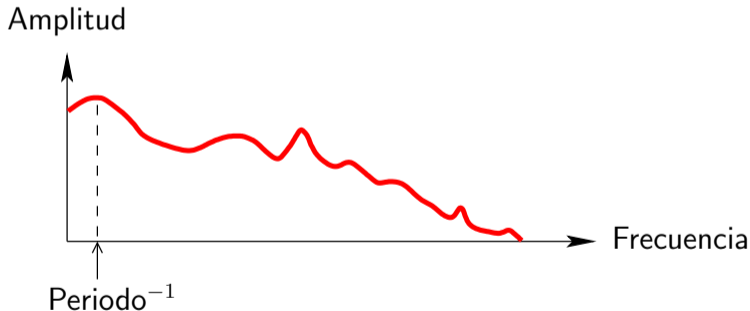
1.1.2. Representación temporal del sonido

- Las ondas sonoras pueden representarse midiendo el **desplazamiento de las partículas desde su posición de equilibrio** a lo largo del tiempo. El resultado es una gráfica del tipo:



1.1.3. Representación frecuencial del sonido

- Debido a la **naturaleza periódica** de las ondas sonoras, además podemos representarlas atendiendo a las componentes de frecuencia⁴ que las componen. Esto se hace mediante el **Análisis de Fourier**. El resultado es una gráfica del tipo:



⁴Señales sinusoidales puras.

1.1.4. Análisis frecuencial de las notas musicales

- Las notas musicales son producidas por elementos que vibran a unas determinadas frecuencias. Por definición, el espectro de una nota musical sólo posee energía (es diferente de cero) en las frecuencias:

$$x, 2x, 3x, \dots$$

donde x es la frecuencia fundamental de la nota (la que indica qué nota es) y $2x, 3x, \dots$ es el timbre de la nota (lo que diferencia el instrumento musical que la ha producido).

1.1.5. Una clasificación de las ondas sonoras

- La forma más común de clasificación responde a su **frecuencia de oscilación**. Así podemos hablar de:
 1. **Infrasonidos**: aquellas oscilaciones con menos de 20 Hz. No son perceptibles por los seres humanos.
 2. **Sonidos audibles**: entre 20 Hz y 20.000 Hz.
 3. **Ultrasonidos**: superiores a 20.000 Hz. Imperceptibles también.
- Dichos intervalos de frecuencia varían entre individuos. Estos son valores promedio.

1.1.6. Intensidad de las ondas sonoras

- La intensidad sonora depende de la **amplitud de las oscilaciones** de las partículas. Dichas oscilaciones provocan **variaciones de presión en el tímpano** del oído y de esta forma podemos percibir el sonido.
- La forma más común de expresar una intensidad sonora I real es de forma relativa a la intensidad necesaria para alcanzar el umbral de audición, que es por definición de 20μ Pa de presión⁵ [1]. En este caso, la intensidad sonora relativa o nivel de presión sonora (Sound Pressure Level o SPL) relativo se expresa como:

$$\text{SPL} = \frac{I}{20\mu \text{ Pa}}$$

⁵1 Pascal = 1 Newton/m².

- El sistema auditivo humano reacciona de forma logarítmica a la intensidad sonora. Por este motivo generalmente expresamos dicha medida física en Decibelios (dB). En este caso:

$$\text{SPL}[\text{dB}] = 20 \log \frac{I}{20\mu \text{ Pa}}$$

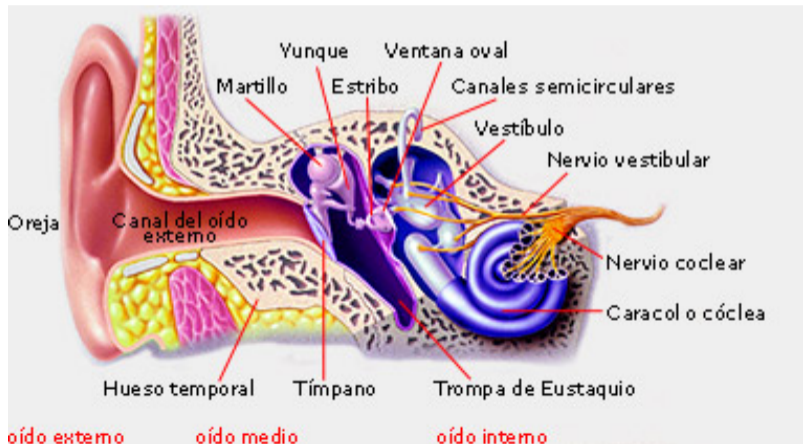
- En la siguiente tabla aparecen algunos ejemplos con intensidades sonoras típicas expresadas en dB's. También se ha añadido una columna para tener una idea de la medida absoluta de intensidad real I .

Contexto	SPL[dB]	I
Umbral Auditivo	0 dB	$20\mu \text{ Pa}$
Susurro	20 dB	$10 \times 20\mu \text{ Pa}$
Conversación	40 dB	$100 \times 20\mu \text{ Pa}$
Tráfico	60 dB	$1.000 \times 20\mu \text{ Pa}$
Metro	80 dB	$10.000 \times 20\mu \text{ Pa}$
Umbral de Dolor	140 dB	$10^7 \times 20\mu \text{ Pa}$
Motor a Reacción	160 dB	$10^8 \times 20\mu \text{ Pa}$

- Nótese que un incremento de 20 dB implica un aumento de la intensidad sonora en un factor de 10.
- El oído humano es capaz de trabajar apropiadamente entre 20μ Pa (0 dB) y 100μ Pa (114 dB), aproximadamente [18].

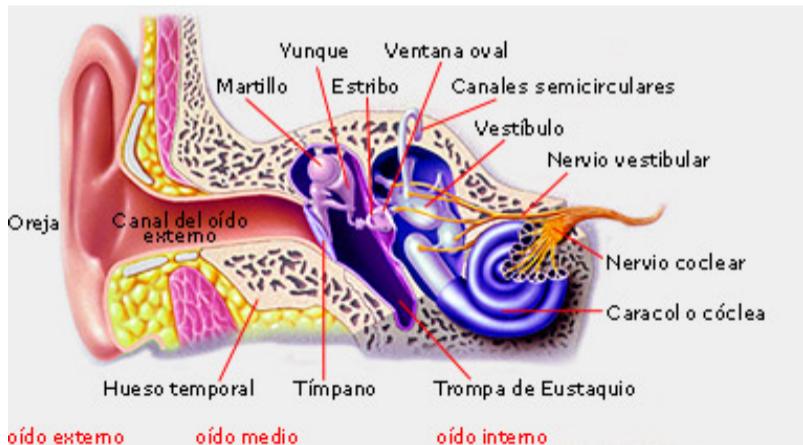
1.2. El sistema auditivo humano

El sistema auditivo humano (SAH) es el encargado de convertir las variaciones de presión provocadas por las ondas sonoras que llegan hasta los oídos, en señales nerviosas que son interpretadas por el cerebro.



1.2.1. El oído externo

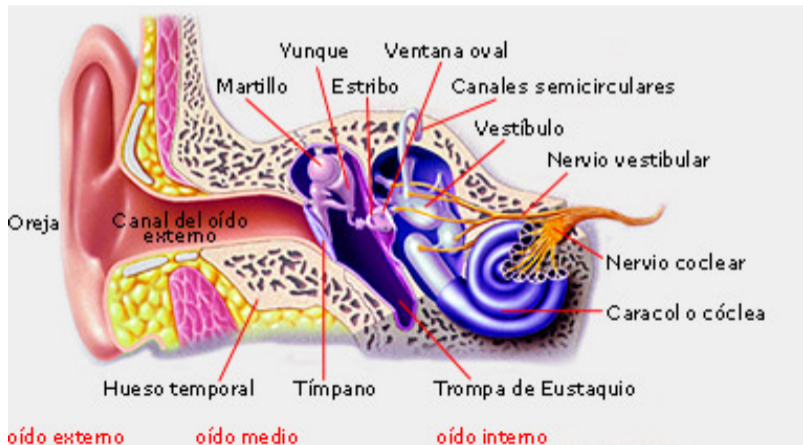
Esta es constituido por el **pabellón auditivo** (oreja), el **conducto auditivo** y el **tímpano**. Su forma de "cono" le permite concentrar la presión sonora sobre el tímpano, la membrana que separa el oído externo del oído medio.



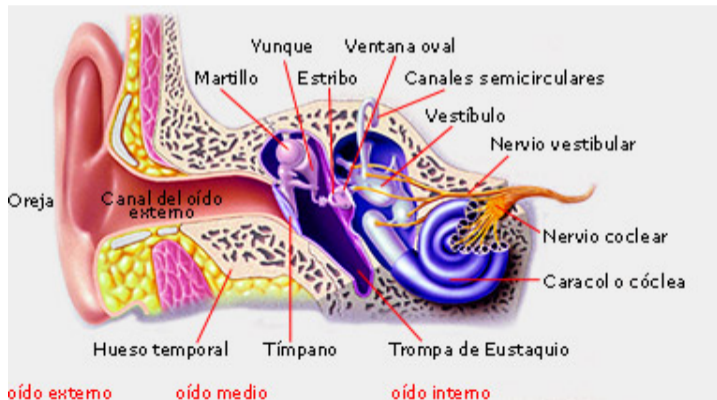
1.2 El sistema auditivo humano

1.2.2. El oído medio

Linda con el oído externo mediante el **tímpano** y con el oído interno a través de la **ventana oval**. Se comunica además con la garganta gracias a la **trompa de Eustaquio**.

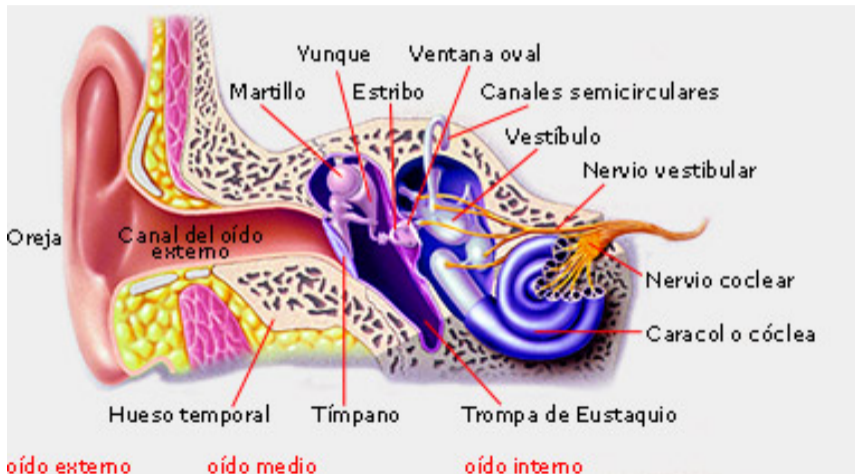


Contiene los **osículos** (martillo, yunque y estribo), cuya misión es la **propagar** (filtrando y amplificando/amortiguando) **las oscilaciones del tímpano hasta la ventana oval**. Para ello se valen de dos músculos (el tensor del tímpano y el stapedius), que controlan el movimiento de los osículos para evitar la transmisión de sonidos demasiado intensos que pudiesen dañar el oído interno.

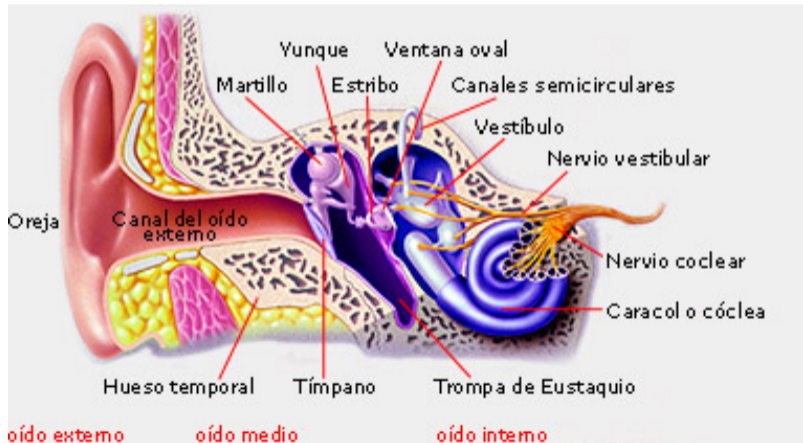


1.2 El sistema auditivo humano

Amortiguación: Cuando un **sonido demasiado estridente** llega hasta nuestros oídos, **los músculos del oído medio amortiguan los movimientos de los osículos** y reducen así la amplitud de las oscilaciones.



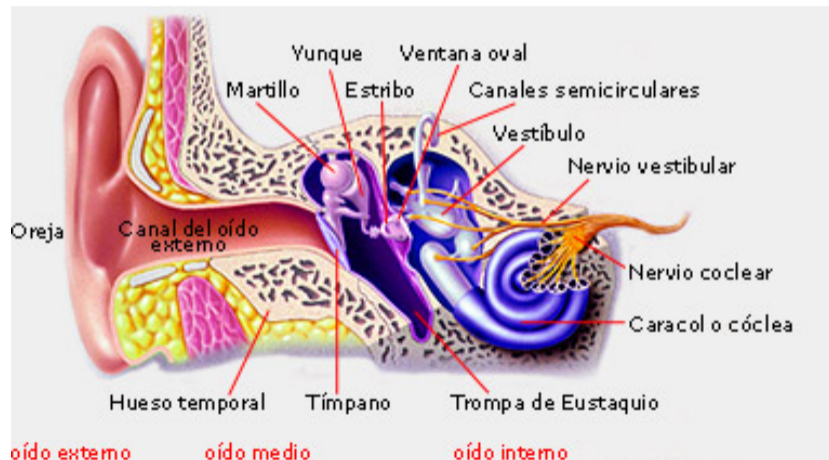
Por desgracia **no responden instantáneamente** (no pueden amortiguar los sonidos de muy corta duración, como por ejemplo una explosión) **y además se fatigan** rápidamente. Por eso no es recomendable estar expuesto a una fuente de sonido muy fuerte durante un largo periodo de tiempo.



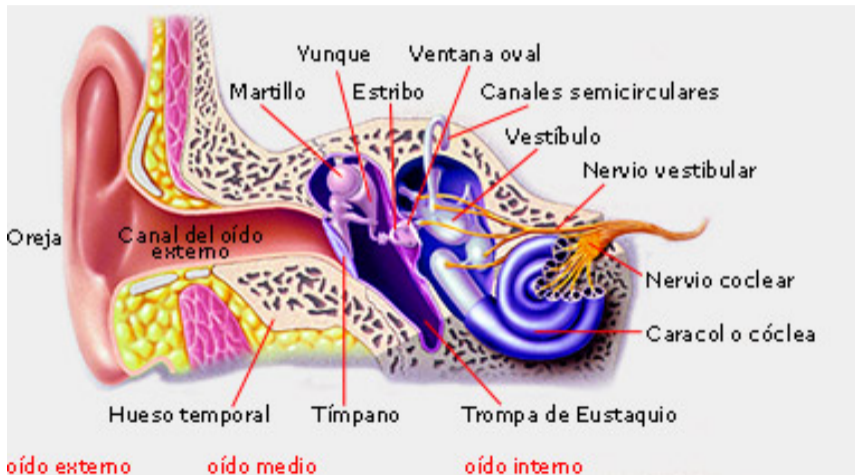
1.2 El sistema auditivo humano

1.2.3. El oído interno

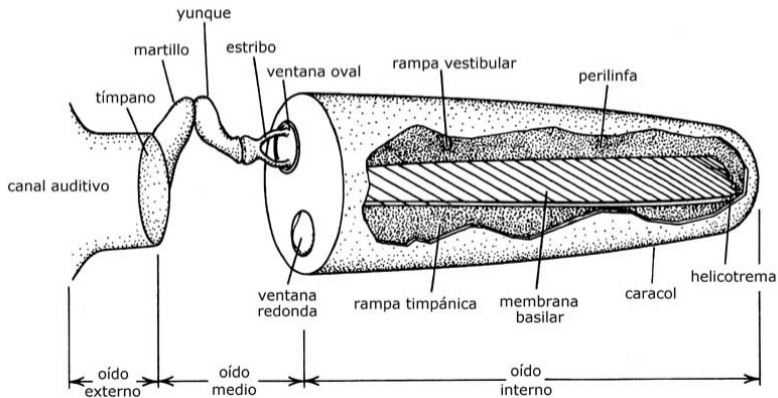
Es una cavidad hermética anegada por **linfa**. Consta de 3 elementos: los **canales semicirculares** que controlan el equilibrio, el **vestíbulo**, y la **cóclea**.



Las vibraciones que llegan a la cóclea son transformadas en **impulsos nerviosos** que llegan hasta el cerebro a través del **nervio coclear**.

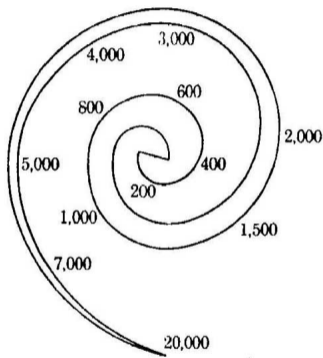


La **cóclea** (o caracol) es un conducto circular enrollado en espiral sobre sí mismo. Longitudinalmente, su interior está dividido en dos partes por la **membrana basilar** que está **tapizada por células ciliares que se mueven con las diferencias de presión que viajan por la linfa**. Estas células son muy sensibles a la deformación y están unidas a las terminaciones del nervio coclear.



1.2 El sistema auditivo humano

Por la estructura del caracol, **las células ciliares resuenan a diferentes frecuencias**. Las que están más cercanas al oído medio vibran con las bajas frecuencias y las más alejadas, con las altas frecuencias [28].⁶

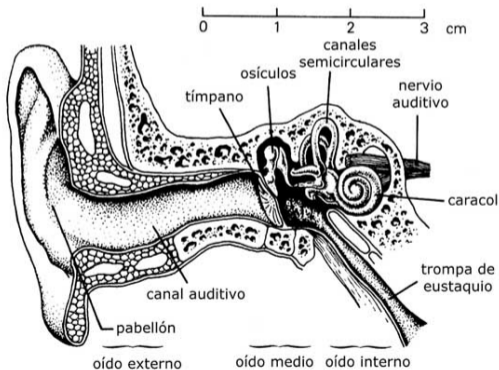


⁶El vídeo http://www.ace.ual.es/~{}vruiz/docencia/imagen_y_sonido/teoria/01-Percepcion_auditiva/EsquemaPercepcionOido.mov presenta el funcionamiento del oído mediante un modelo simplificado.

1.2 El sistema auditivo humano

1.2.4. La transmisión ósea

- Además de a través del oído medio, **las ondas sonoras llegan al oído interno directamente por medio de la oscilación de los huesos del cráneo.** La transmisión ósea es la responsable de que escuchemos nuestra voz con un timbre distinto al que lo escucha el resto de las personas.

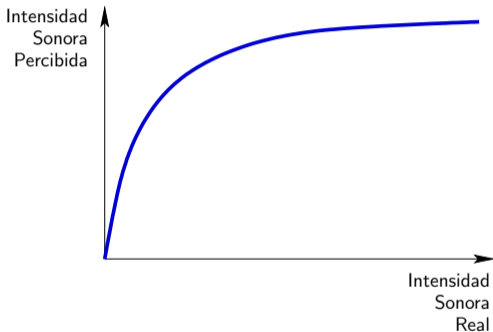


1.3. Percepción del sonido

- La forma en que el SAH percibe los sonidos es estudiada por una rama de la psicología que se llama **psicoacústica**.

1.3.1. Percepción de la intensidad sonora

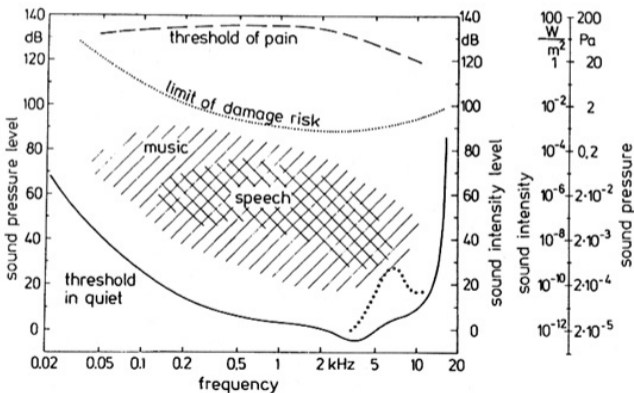
- La relación existente entre el volumen percibido de un sonido y el volumen real del sonido no es lineal, sino logarítmica.



Por este motivo, una medida decibélica de la intensidad sonora es la más adecuada para expresar dicho parámetro.

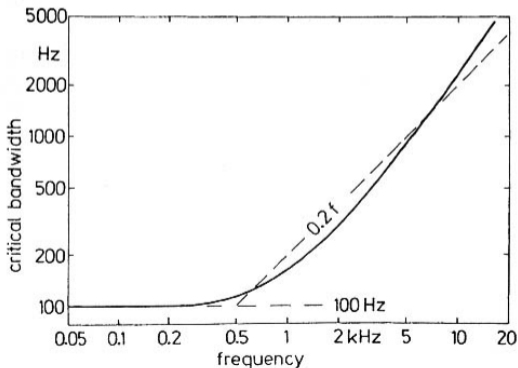
1.3.2. El umbral de audición

- La intensidad de un sonido necesaria para percibirse **depende de la frecuencia**. Esto se debe fundamentalmente a la estructura física del oído [28].



1.3.3. Resolución frecuencial

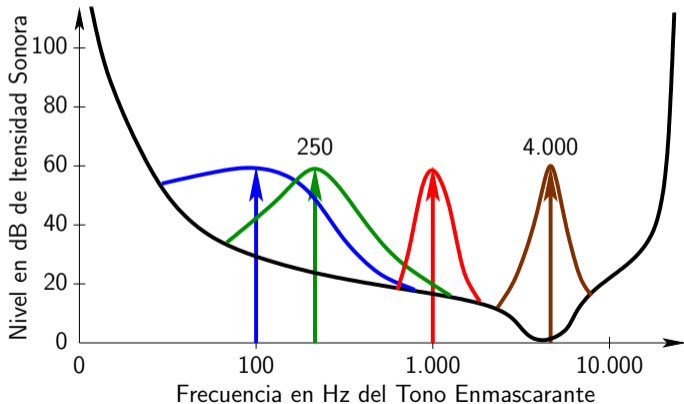
- El SAH posee una resolución en el dominio de la frecuencia **bastante limitada**. Algunos experimentos han demostrado que el SAH puede modelarse (de forma mínima) como un banco de **24 filtros paso banda**, cuyo ancho de banda (conocido en este caso como ancho de banda crítica o *bark*) depende de la frecuencia [1].



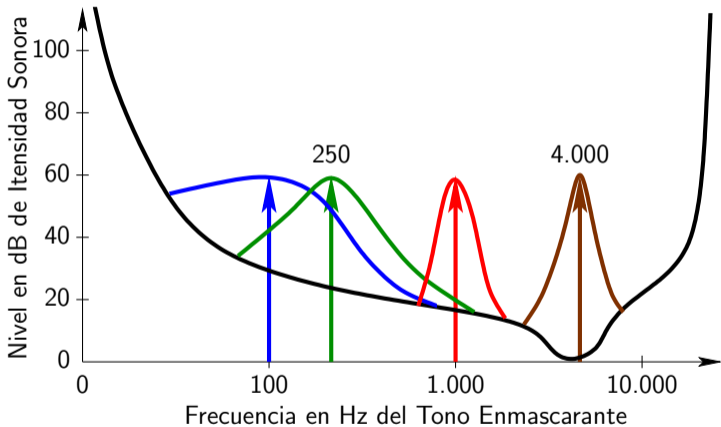
- Teóricamente, dos sonidos simultáneos dentro de la misma banda crítica no podrían ser diferenciados.
- La limitación en la resolución frecuencial tiene una explicación física. Cuando una señal sonora pura (compuesta por una única componente de frecuencia) mueve las células ciliares de la membrana basilar, estos mueven también a las colindantes. Esta perturbación provoca que una frecuencia cercana de menor intensidad sea enmascarada.

1.3.4. Enmascaramiento simultáneo

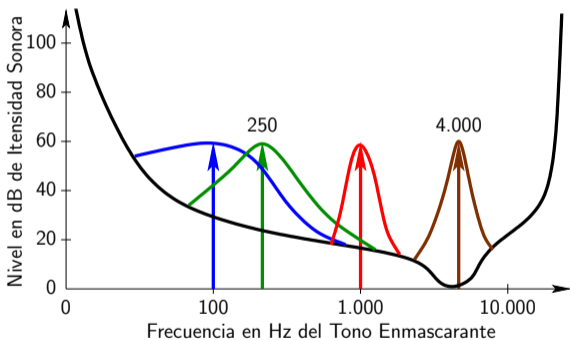
- Ya que la resolución frecuencial es limitada, **la intensidad con la que percibimos un sonido depende de la intensidad de otros sonidos simultáneos**. Aquí tenemos algunos ejemplos (nótese que la escala de frecuencias es logarítmica):



- Concretamente, los sonidos de frecuencia similar (cercana) tienden a taparse de forma que el más fuerte puede no dejar oír al más débil [4].



- El **enmascaramiento simultáneo** ha sido intensamente estudiado debido a que es la principal fuente de redundancia psico-acústica explotada en los modernos algoritmos de codificación lossy de audio (MP3⁷ [19], Dolby Digital [14], DTS⁸ [34, 14], ATRAC⁹ [36], etc.).



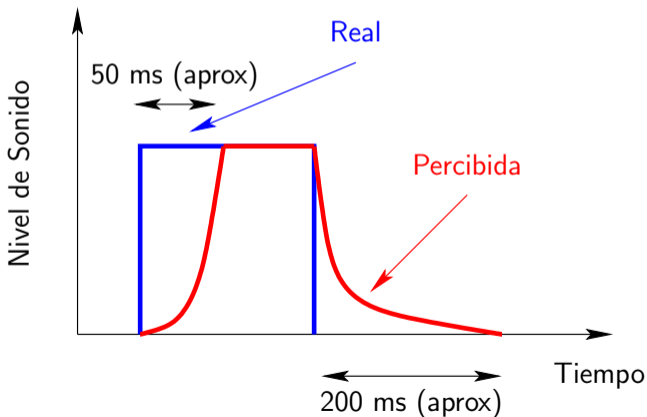
⁷MPEG-1 Layer 3.

⁸Digital Theater Systems.

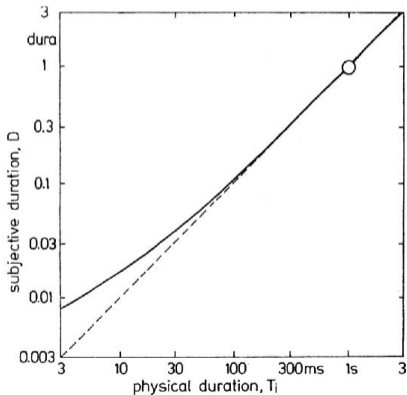
⁹Adaptive Transform Acoustic Coding.

1.3.5. Resolución temporal

- El SAH posee una resolución temporal **limitada**. De hecho;
 - EL SAH **no percibe instantáneamente el nivel de intensidad real** de un sonido [1].

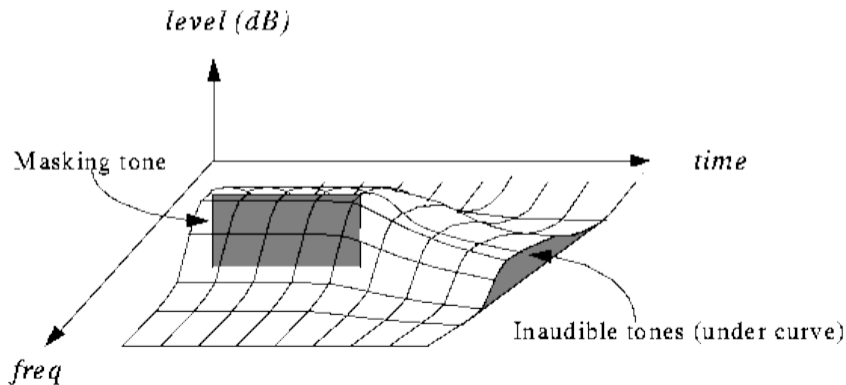


- Por tanto, el SAH **necesita una separación temporal mínima entre dos sonidos para poder distinguir un silencio** (independientemente de sus frecuencias). Esto es consecuencia de que después de desaparecer un sonido, la sensación de su existencia perdura durante un cierto intervalo de tiempo.



1.3.6. Enmascaramiento temporal

- Como consecuencia de la limitación en la resolución temporal del SAH, es posible que un **sonido que cesa enmascare a otro posterior**, si su separación en el tiempo es pequeña y su separación espectral también [4].



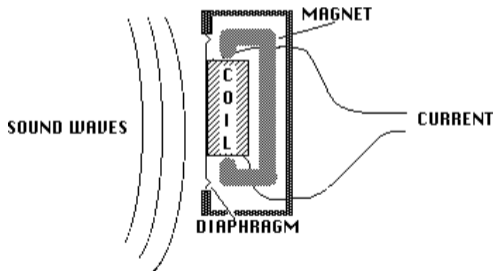
1.3.7. Escucha binaural

- Los seres humanos poseen dos oídos que están separados una cierta distancia (el diámetro de la cabeza). Por tanto, el sonido que reciben casi nunca es exactamente el mismo.
- Este hecho es usado por el SAH para **localizar las fuentes sonoras**. Para ello utiliza:
 - El nivel de intensidad sonora es siempre más fuerte en aquel oído que está más próximo a la fuente sonora.
 - Como el tiempo que tardan las ondas sonoras provenientes de una fuente en alcanzar a las dos orejas es ligeramente distinto, el cerebro es capaz de calcular la localización espacial de la fuente sonora.

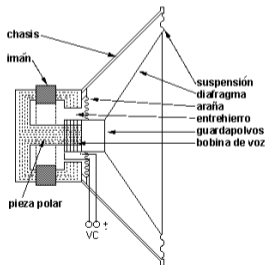
1.4. Sistemas de captura y reproducción de audio

1.4.1. El micrófono y el altavoz

- El micrófono y el altavoz fueron inventados por el escocés Alexander Graham Bell en 1876.
- El micrófono y el altavoz son transductores electroacústicos. Un “micro” transforma las vibraciones debidas a la presión acústica ejercida sobre su membrana por las ondas sonoras en energía eléctrica. El altavoz hace justamente lo contrario.



Micro de bobina



Altavoz de bobina

1.4.2. Tipos de micrófonos y altavoces

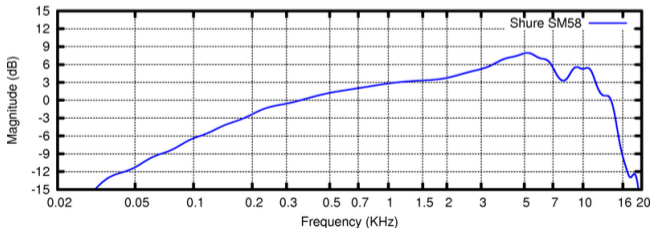
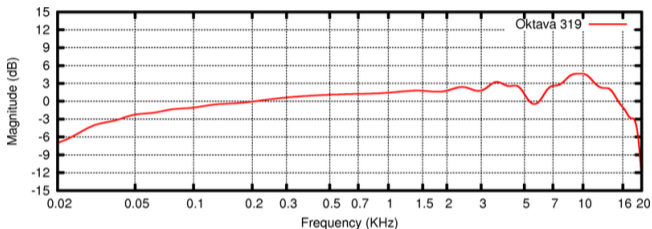
- Sorprendentemente, ambos elementos tienen muchas cosas en común. De hecho, podemos usar un altavoz como un micrófono (aunque no es lo ideal), y un micrófono como un pequeño altavoz (aunque tampoco es lo ideal, claro).
 1. **Micrófonos/Altavoces de condensador:** La membrana que mueve/produce las ondas sonoras es solidaria a una de las caras de un condensador. En el micro al moverse se modifica su capacidad y ésta se registra eléctricamente. En el altavoz la electricidad alterna entrante hace que las caras se atraigan o se repelan.
 2. **Micrófonos/Altavoces de bobina:** La membrana es solidaria a una bobina que se mueve dentro de/produce un campo magnético. En el micro, al moverse se induce una corriente eléctrica. En el altavoz, la corriente eléctrica hace que se mueva.

3. **Micrófonos/Altavoces piezoeléctricos:** En el micro la membrana mueve un material piezoeléctrico (un material que al friccionarse produce diferencias de potencial). En el altavoz, la material pizoeléctrico (poliéster, carbón o cerámica) se contrae o expande en función de la intensidad que le atraviesa.

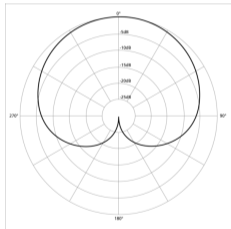
1.4.3. Principales características de los micrófonos

1. **Potencia:** Las señales eléctricas producidas por un micrófono suelen ser muy débiles y deben amplificarse. De hecho, algunos micros poseen un amplificador previo y necesitan alimentación externa.
2. **Linealidad:** El micro ideal debería transducir con la misma potencia todas las intensidades sonoras.

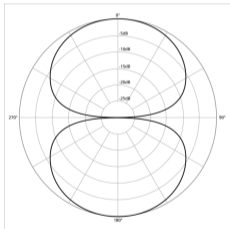
3. **Respuesta en frecuencia o distorsión armónica:** El micrófono ideal transduce con la misma potencia todas las bandas de frecuencias del espectro audible (20 Hz a 20 KHz).



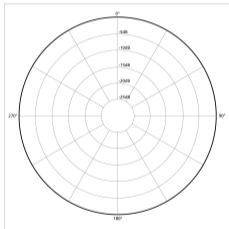
4. **Direccionalidad:** Indica la dirección dentro del espacio en 3D que mejor es registrada por el micro. Se habla de micros unidireccionales cuando tienen que estar dirigidos hacia la fuente de sonido, bidireccionales cuando registran justo lo que está en una cara del micro y en la opuesta y omnidireccionales, cuando registran por igual todos los sonidos, independientemente de su procedencia.



Unidireccional



Bidireccional



Omnidireccional

1.4.4. Principales características de los altavoces

1. **Potencia:** Se refiere a la potencia eléctrica (medida en vatios) máxima que puede entrar al altavoz (no a la potencia acústica generada) antes de que distorsione en exceso o de que pueda sufrir desperfectos (la bobina puede calentarse y quemar el aislante que la recubre). Dicha potencia P depende de la intensidad de corriente I y de la impedancia de la bobina Z , según

$$P = I^2 Z. \quad (1.1)$$

La Z es función de la frecuencia.

2. **Linealidad:** El altavoz ideal debería transducir con igual potencia todas las intensidades de corriente.
3. **Respuesta en frecuencia o distorsión armónica:** Al igual que el micro, el altavoz ideal debería transducir con la misma potencia todas las bandas de frecuencias del espectro audible (20 Hz a 20 KHz).

4. **Direccionalidad:** Al igual que el micro, los altavoces puede diseñarse para enviar potencia por igual a las tres dimensiones del espacio (omnidireccionales), hacia adelante y hacia atrás (bidireccionales) y sólo en una dirección (unidireccionales).

1.4.5. El amplificador de audio

- Es un dispositivo analógico que amplifica señales de audio. Sus entradas (y salidas) son analógicas y si esto no fuera así, es porque dentro se produce una conversión D/A.



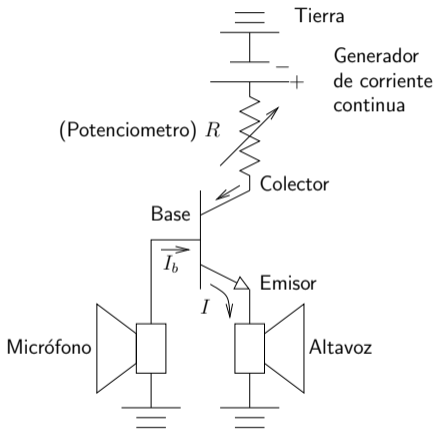
1.4.6. Funcionamiento de un amplificador

- La mayoría de los amplificadores se diseñan a partir de transistores y/o de válvulas. Un elemento de este tipo es un dispositivo electrónico que posee tres “patas”: el emisor, la base y el colector. La base controla la cantidad de corriente continua que atraviesa el transistor desde el emisor hacia el colector. Si llamamos I_b a la corriente que entra por la base, la corriente que pasa a través del transistor es

$$I = \beta \times I_b, \quad (1.2)$$

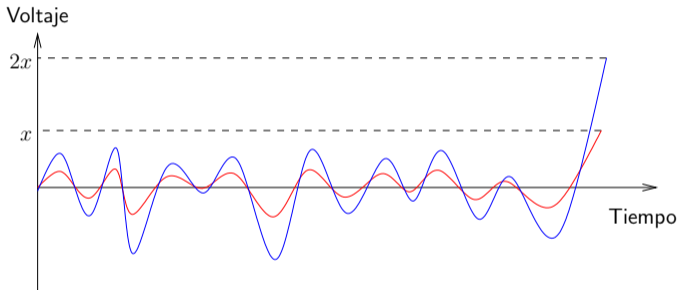
donde β es la ganancia del transistor.

- Muy esquemáticamente, un amplificador, un micrófono y un altavoz se relacionan de la siguiente manera¹⁰:



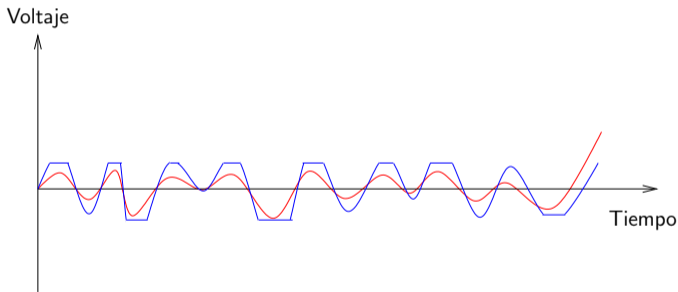
¹⁰Nótese que este esquema en realidad no funcionaría porque la corriente sólo fluye en un único sentido!

- El nivel de amplificación depende de la ganancia β , ya que define la relación entre las amplitudes de la señal de entrada I_b y la de salida I . Esta ganancia es controlada por el potenciómetro de volumen del amplificador. Por ejemplo, si $\beta = 2$:



1.4.7. Principales características de los amplificadores de audio

1. **Potencia:** Se refiere a la potencia eléctrica (medida en vatios) máxima que puede salir del amplificador antes de que distorsione.



2. **Linealidad:** El amplificador ideal amplifica exactamente con la misma ganancia todas las amplitudes de corriente de entrada. Los amplificadores más lineales son los que se construyen con válvulas.
3. **Respuesta en frecuencia o distorsión armónica:** Al igual que el micro, el altavoz ideal debería transducir con la misma potencia todas las bandas de frecuencias del espectro audible (20 Hz a 20 KHz). Ante una señal sinusoidal pura, la mayoría de los amplificadores tienden a generar armónicos y/o a producir dispersión espectral (alrededor del tono puro aparecen en la frecuencia otros tonos de menor intensidad).
4. **La relación señal/ruido:** Todos los elementos electrónicos producen ruido electrónico (de origen térmico, interferencias, etc.). La relación entre la potencia del ruido y la máxima potencia de señal que pueden amplificar, es lo que se conoce como SNR (Signal-to-Noise Ratio).

1.4.8. Soportes de almacenamiento

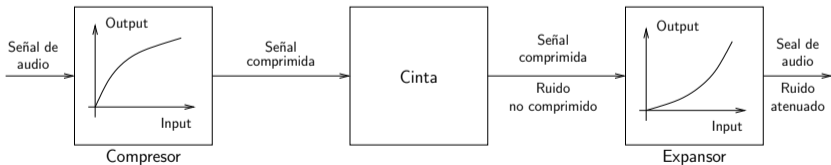
1. **El disco de vinilo:** Apareció a comienzos del siglo XX. Es un disco de plástico vinílico en el que se araña un surco en forma de espiral que presenta deformaciones microscópicas. Por el surco se desliza una aguja (idealmente de diamante) que vibra a causa de dichas deformaciones. Finalmente, dichas vibraciones se transducen (usando un tipo especial de micro) a señales eléctricas.
2. **La cinta magnética:** Apareció a mediados del siglo XX. Consiste en una cinta o banda de plástico flexible impregnada con algún material ferromagnético (generalmente óxido de hierro o cromo). Una bobina (cabeza) se desplaza a lo largo de la cinta y magnetiza dicho material cuando se graba en la cinta. Cuando se reproduce el material induce una corriente eléctrica en la bobina.

1.4.9. Sistemas de reducción de ruido

- Como ya se ha indicado, no existe ningún elemento electrónico activo o soporte de almacenamiento (elementos pasivos) que estén exentos de ruido. Para reducirlo en lo posible se idearon los sistemas de reducción de ruido, especialmente para las cintas magnéticas que poseen ruido que puede escucharse en ausencia de señal.¹¹
- El ruido que produce una cinta magnética es de tipo blanco (ocupa todo el rango de frecuencias) y tiene un volumen constante, pero pequeño. Como sabemos, el SAH no es capaz de percibir los sonidos débiles en presencia de los fuertes y por tanto, el ruido de una cinta sólo va a ser perceptible cuando la señal a registrar es débil.

¹¹Recuérdese la película “El sexto sentido”.

- Los Laboratorios Dolby se hicieron famosos por diseñar (y patentar) el primer sistema de reducción de ruido para las cintas magnéticas. Un sistema Dolby NR (Noise Reduction) antes de grabar la señal en la cinta procede a amplificar las bajas amplitudes y a atenuar las altas amplitudes, siguiendo una escala logarítmica (esto es lo que se conoce como un compresor de audio). Tras leer la señal deformada de la cinta, se procede a atenuar (usando un expansor de audio) las bajas amplitudes y a amplificar las altas, dejando la señal original. Como el ruido es de baja amplitud, el expansor lo atenúa. El efecto es una reproducción de mayor fidelidad.



1.4.10. Número de canales

1. **Sistemas monofónicos:** Poseen un único canal de audio.
2. **Sistemas estéreo:** Poseen dos canales, uno para el oído izquierdo (L) y otro para el derecho (R).
3. **Dolby Surround:** Poseen dos canales, pero pueden simularse la aparición de otros dos. A finales de los 70, Ray Dolby patentó el sistema Dolby Surround. Por aquel entonces los sistemas estéreo sólo se usaban en las salas cinematográficas y Dolby tuvo la feliz idea de crear dos canales virtuales más llamados central (C) y envolvente o surround (S).

El éxito de Dolby se debió a que el sistema era completamente compatible con los sistemas estéreo normales: una cinta o un disco grabado con Surround podía escucharse en un equipo normal, con dos altavoces.

En muchos episodios de una grabación estéreo, el contenido de los canales L y R son prácticamente idénticos. Esto puede ocurrir, por

ejemplo, cuando un avión situado justo en frente (en el centro de la pantalla) viene justo en nuestra dirección, pasa por encima de nuestra cabeza y se marcha por nuestra espalda.

Para poder realizar la sensación de que es justamente el avión la fuente del sonido, Dolby propuso situar un canal llamado “center” (C) justo detrás de la tela de la pantalla y otro llamado “surround” (S) a nuestra espalda. Por definición,

$$\begin{aligned}C &= L + R \\S &= L - R.\end{aligned}$$

Dolby sabía que pronto el avión pasaría sobre nuestras cabezas y se marcharía por nuestras espaldas. Además, al ocurrir esto, el sonido que proviniera de C debería apagarse y sonar a nuestras espaldas. Para conseguir esto, Dolby aplicó una propiedad interesante del SAH que dice: “el oído no es sensible a la fase de la señal, sólo a su amplitud”.

Partiendo de que la escena del avión, $L = R$, Dolby propuso codificar el canal trasero como la diferencia de la fase de L y la fase de R .

Desfasar una señal de audio respecto de otra significa retrasarla en el tiempo algunos milisegundos. Entonces, cuando no existe desfase:

$$\begin{aligned}C &= L + R = 2R = 2L \\S &= R - L = 0.\end{aligned}$$

Y cuando existe desfase máximo (180°):

$$\begin{aligned}C &= L + R = R + R = 0 \\S &= R - L = 2R = 2L.\end{aligned}$$

Así, si no queremos que por el canal central suene nada, desfasamos L de R 180° , y viceversa. Y L y R se escuchan igual que antes, haya o no desfase.

- Dolby Digital (DD):** Se trata de un sistema de almacenamiento digital con 5.1 canales: L , R , C , R_L (Rear Left) y R_R (Rear Right). El “.1” referencia al canal LFE (Low Frequency Effect), un canal de baja frecuencia (120 Hz) dedicado a menear las tripas de los espectadores.

5. **Digital Theatre System (DTS):** Posee el mismo número de canales que DD.

Capítulo 2

Percepción visual

2.1. La luz

2.1.1. Las ondas luminosas

- La luz es una **onda electromagnética¹ transversal²** y a diferencia del sonido no necesita un medio material para propagarse.³
- La luz, además de en el vacío también se propaga en los cuerpos translúcidos. En cualquier caso su velocidad de propagación depende de la permeabilidad electromagnética del medio.

Medio	Velocidad (km/s)
Vacío	300.000
Fibra Óptica	200.000

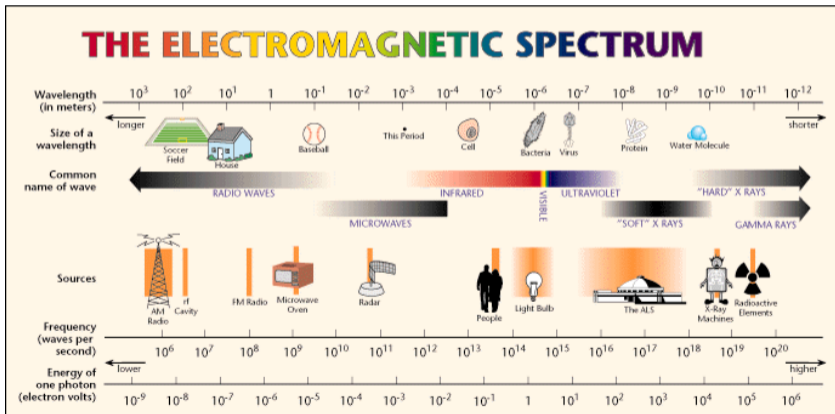
¹Afecta al campo eléctrico y electromagnético.

²Lo que significa que la perturbación energética causada en el medio tiene una dirección perpendicular a la dirección de propagación. Esto ocurre por ejemplo en las ondas producidas en la superficie del agua.

³Véase el applet http://www.ace.ual.es/~{}vruiz/docencia/imagen_y_sonido/teoria/applets/onda_electromagnetica.html.

2.1.2. Las ondas electromagnéticas

La luz no es diferente de una onda de radio o de los rayos X, excepto en que la frecuencia de oscilación de la perturbación electromagnética es diferente.



2.1.3. Intensidad de las ondas luminosas

- Una forma de medir la intensidad luminosa es en **Candelas** (cd). De esta forma, para medir la cantidad de luz en un determinado lugar se indican el número de Candelas/unidad de superficie.

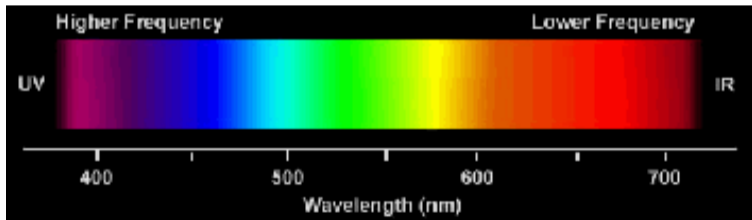
Lugar	cd/pie ²
Día soleado	9.000
Día nublado	1.000
Oficina	100
Luna llena	0,01

- Relacionada con la intensidad luminosa está el **índice de reflectancia** que mide la cantidad de luz reflejada en un objeto.

Objeto	Índice de Reflectancia
Nieve	0,93
Plata	0,90
Pintura blanca	0,80
Acero inoxidable	0,65
Terciopelo negro	0,01

2.1.4. El color de la luz

- El color de la luz **depende de la frecuencia de la onda luminosa**. En este sentido podemos distinguir entre luces **monocromáticas** y luces **multicromáticas**. Las primeras sólo están compuestas por una onda de frecuencia constante, mientras que las segundas son una mezcla de luces monocromáticas. Esta es la escala de colores del espectro visible:



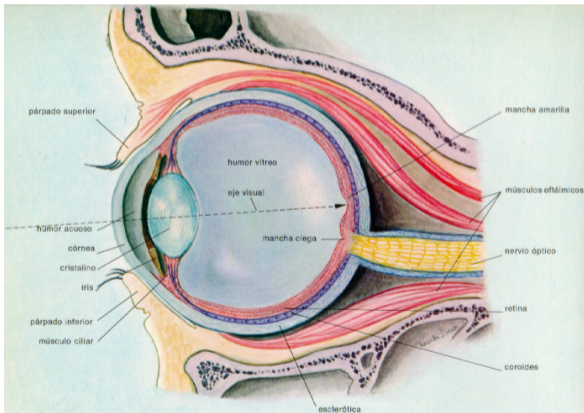
- En concreto, la luz blanca está compuesta por la suma de todas las luces monocromáticas del espectro visible.

2.2. El sistema visual humano

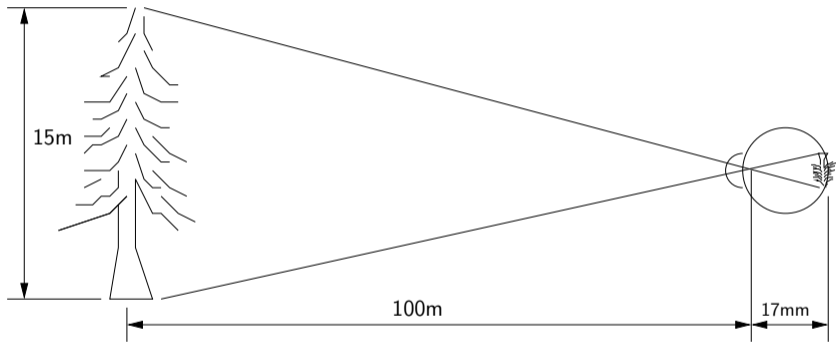
El sistema visual humano (SVH) es el encargado de convertir las ondas electromagnéticas que pertenecen al espectro visible y que llegan hasta los ojos, en señales nerviosas que son interpretadas por el cerebro.

2.2.1. El ojo humano

- El ojo humano es una estructura prácticamente esférica en la que entra la luz sólo por un pequeño agujero (como ocurre en una cámara fotográfica). La cubierta externa del ojo es opaca y el interior del ojo es translúcido.

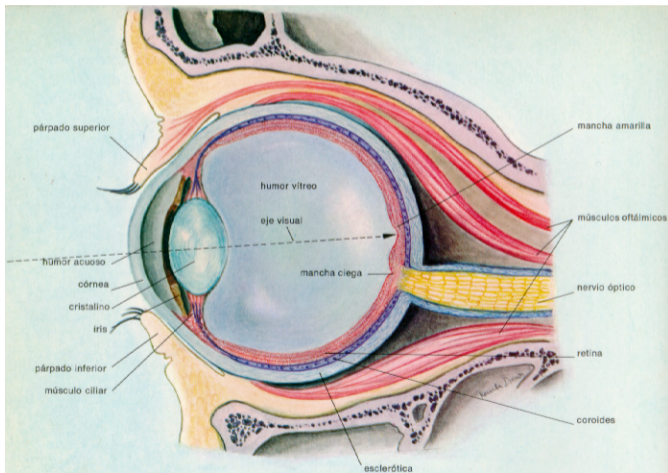


- En la retina las imágenes se proyectan de forma invertida (como ocurren en una cámara oscura).

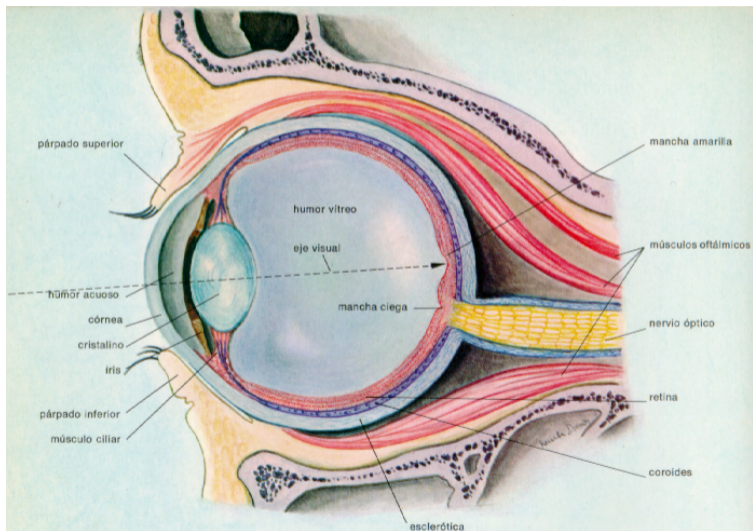


2.2.2. La esclerótida

- Es la membrana más externa del ojo y es opaca, excepto en su parte anterior donde es transparente y se llama **córnea**.



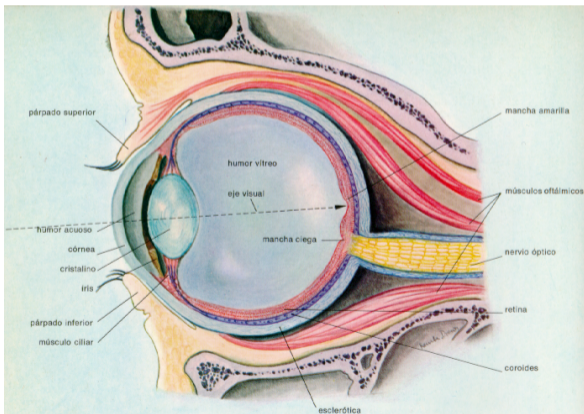
- Su función principal es la de evitar que la luz entre en el ojo, excepto a través de la cornea.



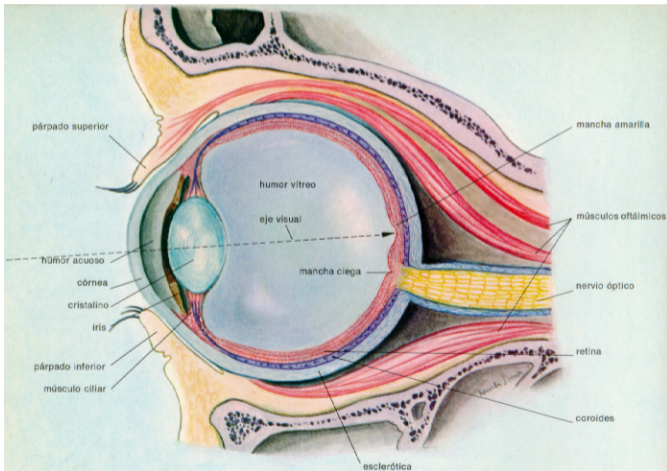
2.2 El sistema visual humano

2.2.3. La coroides y el iris

- Se trata de una membrana muy pigmentada y vascularizada que recubre prácticamente todo el ojo. Evita que entre luz a través de ella y su gran irrigación sanguínea proporciona calor y alimento al resto del ojo [20].



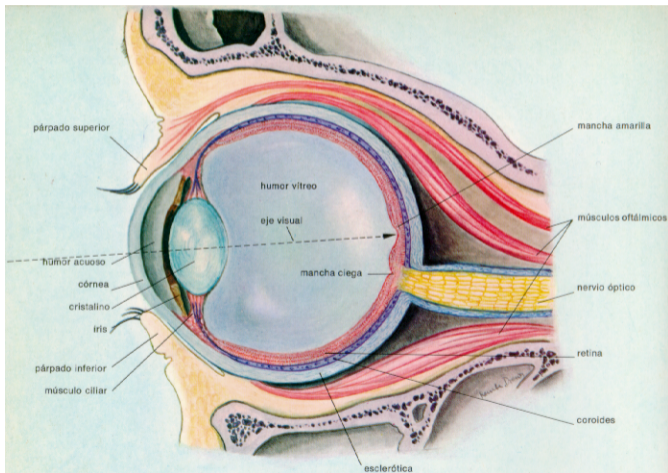
- En su parte anterior tiene una expansión muscular redonda llamada **iris** y en el centro hay una abertura redonda llamada **pupila**. La función del iris es controlar (mediante un acto reflejo) el diámetro de la pupila, determinando así la cantidad de luz que entra en el ojo.



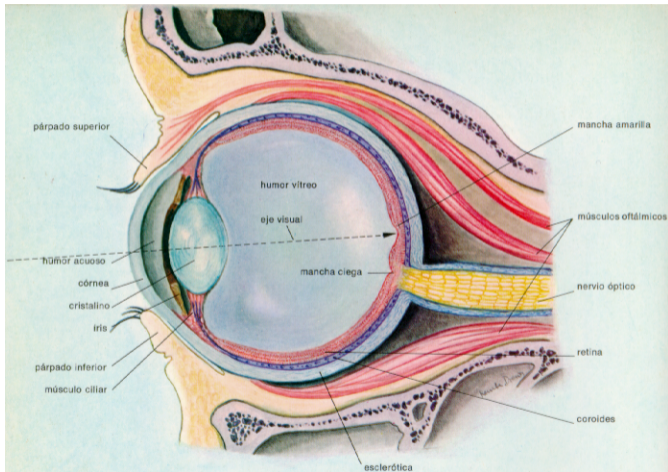
2.2 El sistema visual humano

2.2.4. El cristalino y el músculo ciliar

- Es una estructura transparente en forma de lente, formado estratos concéntricos de células fibrosas que están unidas al músculo ciliar.



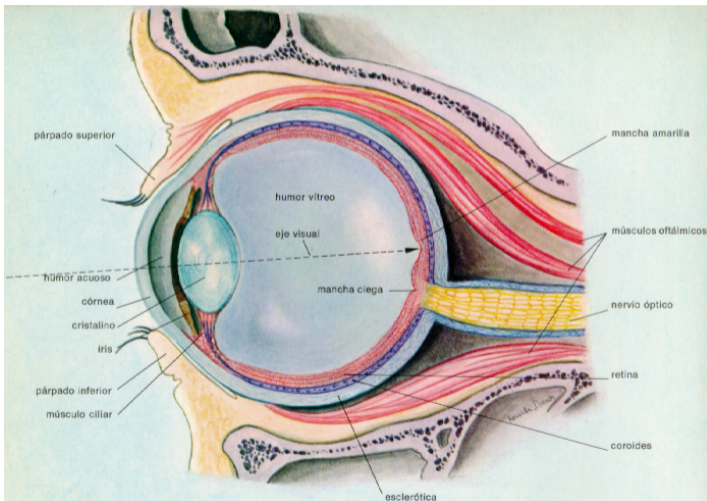
- De la tensión de este músculo depende la distancia focal del ojo. Cuando el ojo está relajado, el cristalino se redondea y el ojo enfoca al infinito.⁴



⁴Por esto, para descansar los ojos es necesario cerrarlos o mirar al infinito.

2.2 El sistema visual humano

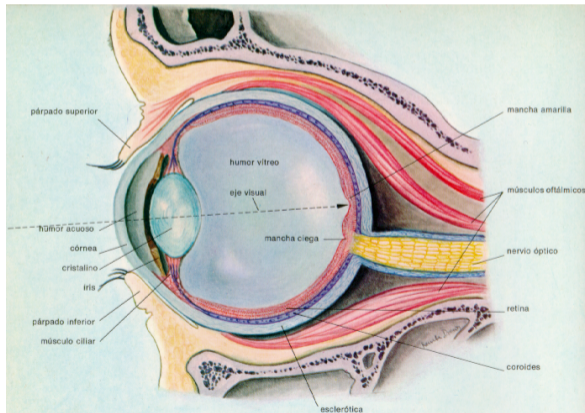
- Además, el cristalino se encuentra ligeramente coloreado por una pigmentación amarilla que absorbe la luz infrarroja y ultravioleta, que podría dañar la retina [20].



2.2 El sistema visual humano

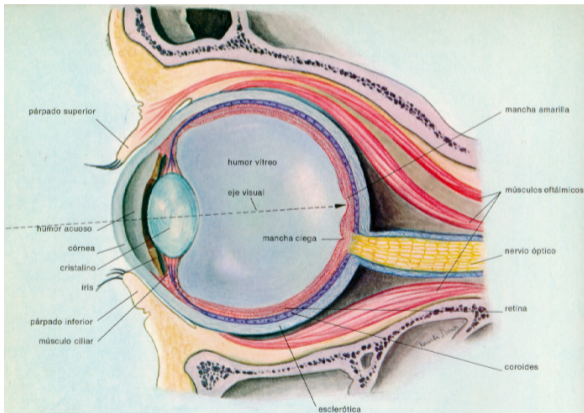
2.2.5. La cornea y el cristalino

- Estas dos estructuras transparentes funcionan como las lentes del telescopio de Galileo. Gracias al fenómeno de la difracción de la luz, la cornea concentra la luz externa para que pase a través de la pupila. El cristalino hace la función inversa, consiguiendo que la luz se concentre en la fovea.



2.2.6. El humor acuoso

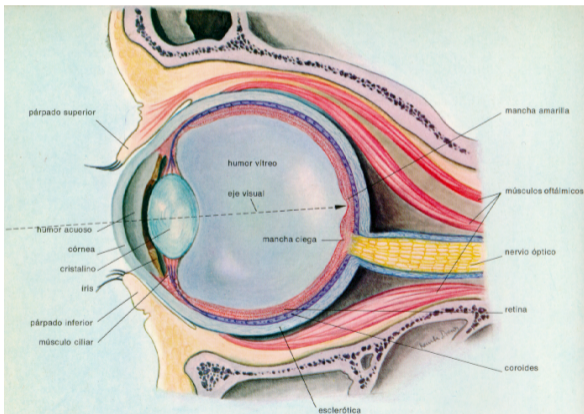
- El ojo posee una cámara anterior rellena de un líquido transparente llamado **humor acuoso**, que es una dispersión de albúmina en agua salada⁵. En esta cámara, detrás el iris, va alojado el cristalino.



⁵Fácilmente recuperable si se pierde.
2.2 El sistema visual humano

2.2.7. El humor vítreo

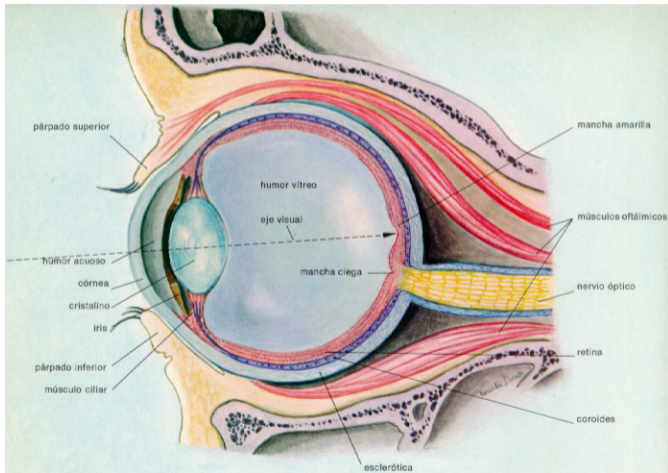
- El ojo posee una cámara posterior que está ocupada por el **humor vítreo**, una especie de gel proteínico muy frágil⁶. Dicha cámara está rodeada por la membrana hialoide (que no se ve en la figura).



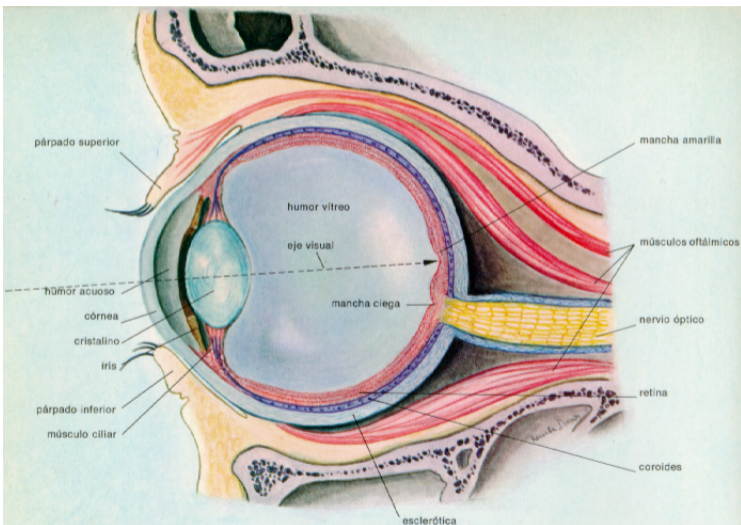
⁶Difícilmente regenerable si se pierde.

2.2.8. La retina

- Es una membrana sensible a la luz y cubre la práctica totalidad de la coroides.

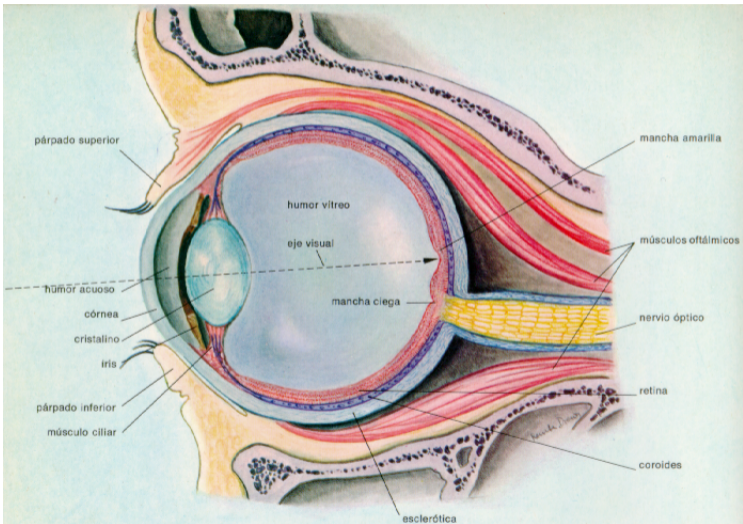


- La retina es realmente el entramado nervioso formado por la células terminales de las fibras del nervio óptico.



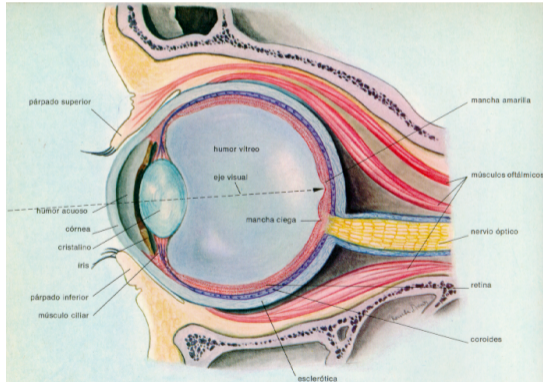
2.2 El sistema visual humano

- En su parte posterior presenta una pequeña depresión llamada **fóvea** que es muy importante en la visión de los detalles.

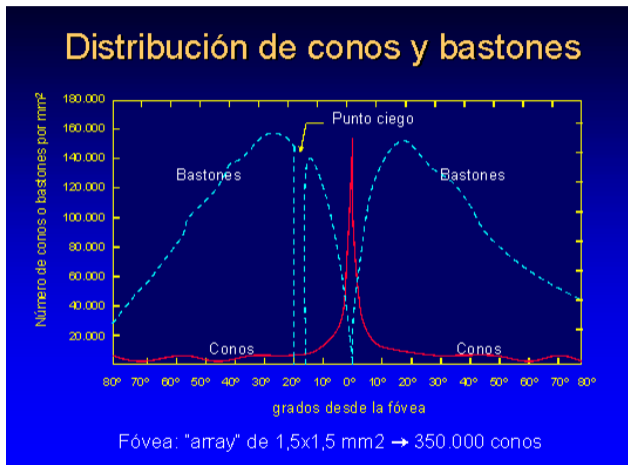


2.2 El sistema visual humano

- En la retina se distribuyen dos tipos de receptores de luz llamados **conos** y **bastones**.
- Los conos son **sensibles al color** y se localizan principalmente en la parte posterior del ojo (en la fóvea). Para que funcionen el nivel de iluminación debe ser suficiente [20].



- Los bastones (mucho más numerosos⁷), no son sensibles al color y se encuentran distribuidos por toda la retina.



⁷Se calcula que el número de conos en un ojo es de 6 o 7 millones, mientras que el número de bastones ronda entre los 75 y los 150 millones.

2.2 El sistema visual humano

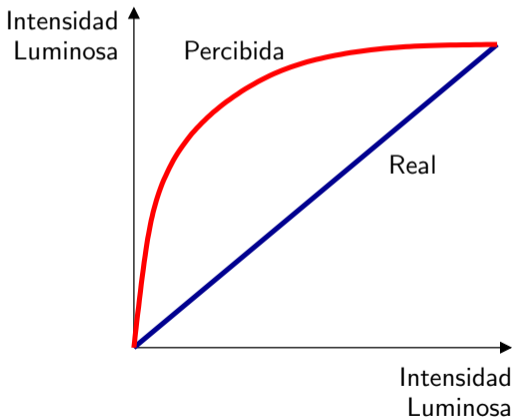
- Los **conos** nos proporcionan la **fisión fotópica** (o de luz brillante) que es la que utilizamos en las situaciones con suficiente intensidad lumínica. Además, cada cono se conecta a una terminación nerviosa por lo que el nivel de resolución visual de la fovea (donde se localiza la parte de la escena visual más importante) es alta.
- Los **bastones**, aunque más numerosos, se conectan en grupos a las terminaciones nerviosas. Esto reduce la cantidad de detalle discernible con ellos aunque dado su gran número y su distribución retiniana nos dan una visión general de la escena. En situaciones de baja intensidad luminosa sólo los bastones son activos (**visión tenue o escotópica**) y no es posible distinguir colores.

2.3. Percepción de la luz

- La luz produce una excitación de las células foto-sensibles de nuestra retina (conos y bastones) que transmiten impulsos nerviosos hasta nuestro cerebro.
- A continuación veremos las principales características de este proceso de percepción.

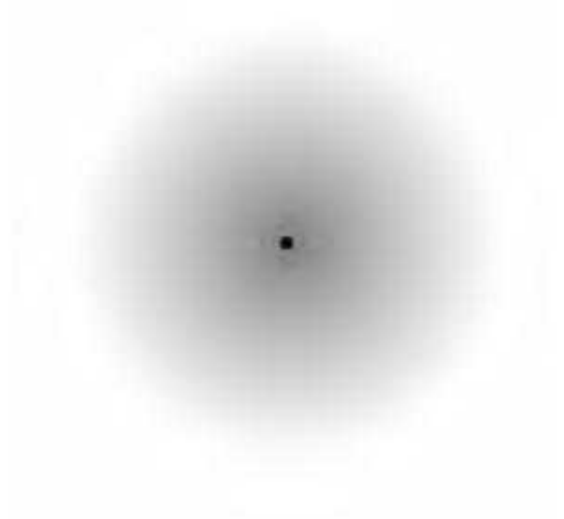
2.3.1. Percepción de la intensidad lumínica

- El nivel de iluminación percibido (subjetivo) es, en general, una función logarítmica de la intensidad de luz incidente sobre el ojo (Ley de Weber-Fechner).



- Sin embargo, la intensidad luminosa (o luminancia) percibida depende además de otros muchos factores:
 1. Del estado de adaptación previa del ojo.
 2. Del tiempo que se hace la observación.
 3. De la zona de la retina impresionada.
 4. De la luminancia del contorno.
 5. Del color.

2.3.1.1. La luminancia percibida depende del tiempo de observación



Fijando la vista en el punto negro, el contorno gris debería desaparecer.

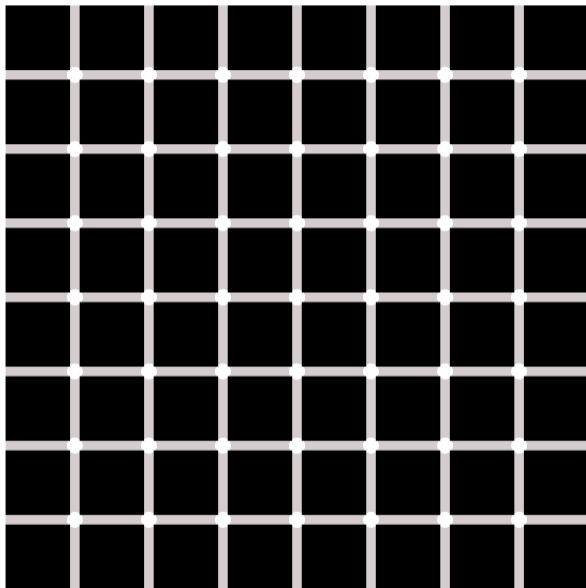
2.3 Percepción de la luz

2.3.1.2. La luminancia percibida depende de la zona de la retina impresionada

- Para comprobar que el nivel de iluminación percibido depende de la zona de la retina impresionada, realícese el siguiente experimento:

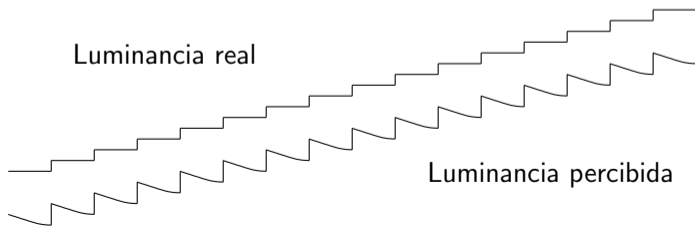
Entre en una habitación en penumbra (con un nivel de iluminación muy bajo) desde otra en la que hay suficiente luz y trate de discernir un objeto mirándolo directamente y mirándolo de reojo. Comprobará que es mejor la segunda opción porque impresionamos a los bastones. Notará sin embargo que no es capaz de distinguir los detalles del objeto.

- Esto también se pone de manifiesto en la siguiente imagen (al fijar la vista en los círculos blancos, veremos que sólo cuando los miramos se ven blancos, los demás se ven negros):



2.3.1.3. La luminancia percibida depende del nivel de iluminación del contorno

- Seguidamente comprobaremos cómo el nivel de luminancia percibido no depende sólo de la intensidad en un punto, sino que depende además de la intensidad de los puntos vecinos [20].



2.3 Percepción de la luz

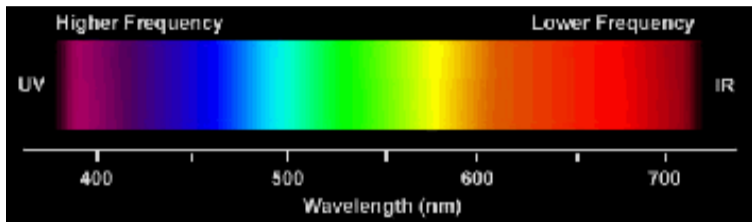


(El tono de gris del cuadrado interno siempre tiene el mismo valor!)

- Por tanto, podemos decir que el SVH tiende a sobrevalorar las fronteras entre objetos [20].

2.3.1.4. La luminancia percibida depende del color de la luz

- En esta figura:

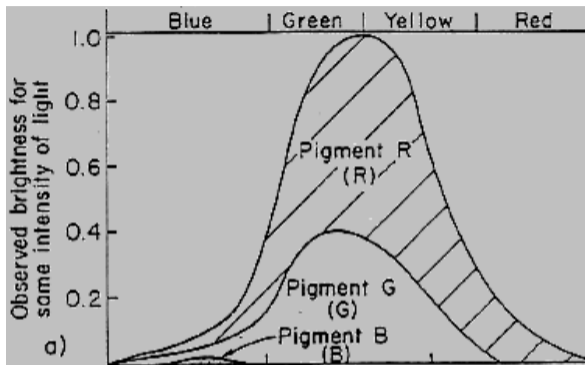


aparecen todos colores exactamente con la misma intensidad.

- Como es posible comprobar, el SVH es más sensible al color amarillo y al verde que al azul o al rojo (deslumbran menos).⁸

⁸Probablemente por este motivo los cuadros de mandos de los coches son típicamente rojos o azules.

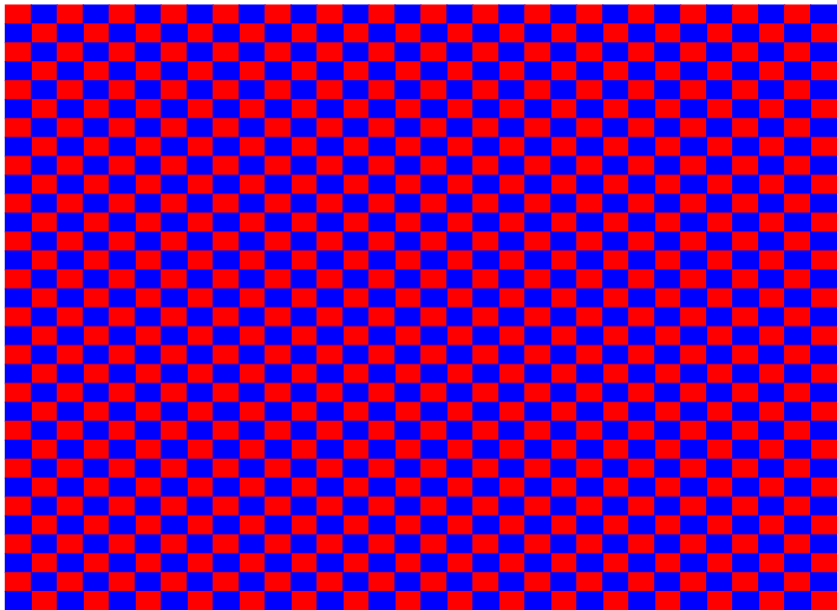
- Sensibilidad relativa del SVH en función del color:



- Esto provoca, por ejemplo, que cuando permanecemos bastante tiempo en una habitación sólo con luz roja o llevamos una gafas rojas el umbral de visión sea muy bajo (casi igual al que hubiésemos conseguido si permanecemos un largo tiempo a oscuras).

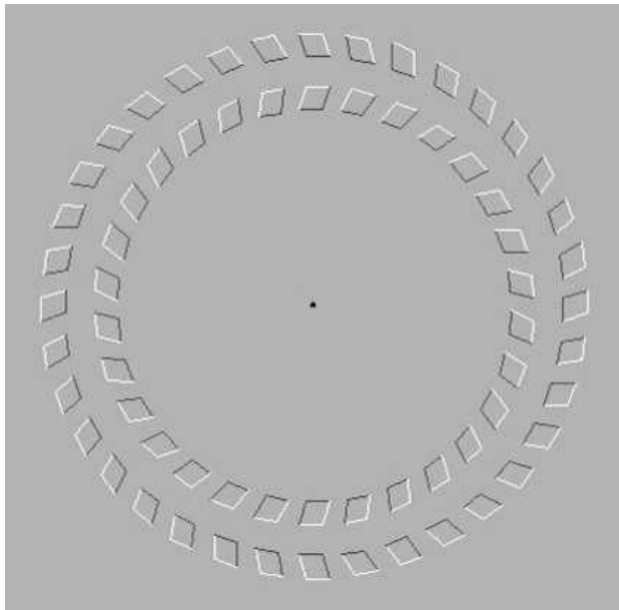
2.3.2. Otros efectos visuales

- El SVH percibe la distancia a los objetos dependiendo del color y de la zona de la retina sensibilizada. Aquí tenemos algunos ejemplos (en la siguiente imagen los cuadrados rojos parecen estar a distinta distancia que los cuadrados azules):

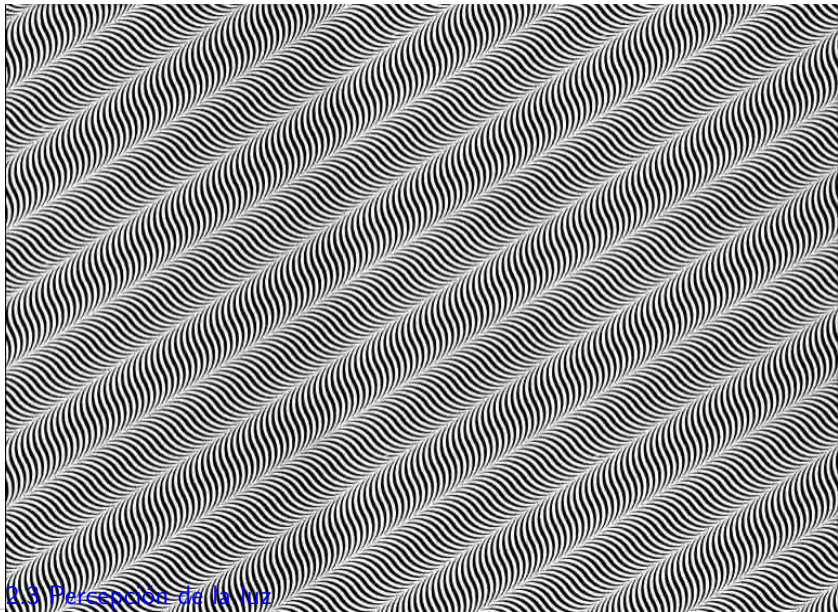


2.3 Percepción de la luz

- Alejándonos o acercándonos de la siguiente imagen, y fijando la vista en el punto negro, apreciaremos cómo si los anillos externos giraran en sentido contrario. Esto se debe a que la posición relativa de los objetos que aparecen en la escena visual depende de la zona de la retina sensibilizada.



- La siguiente imagen pone al límite la capacidad perceptiva del SVH. Se trata de una imagen de muy alta frecuencia en la que se repiten de forma periódica un par de patrones. Tras mirala un rato, sólo la parte de la imagen que incide en la fovea se percibe sin oscilación (sin movimiento aparente).



- La luz que incide sobre el punto ciego no se utiliza en el proceso de visión [32].



Con el ojo derecho tapado mirar la X y viceversa. Si el punto no desaparece, acérquese o aléjese de la imagen

2.3.3. La agudeza visual

- Mide la capacidad para discernir las altas frecuencias (por ejemplo, 2 puntos muy cercanos). Depende fundamentalmente de la concentración de conos en la superficie retiniana y de la precisión del enfoque del ojo.
- El campo de visión (área donde la agudeza visual es mayor) del ojo humano es rectangular (30° en vertical y 40° en horizontal). Fuera de este campo, la imagen no incide en la fovea y se ve borrosa.
- Por esta razón, en las fotografías, en el cine, en la televisión, etc., la imágenes son más anchas que altas.

2.3.4. La persistencia visual

- Si visualizamos una imagen estática (fotograma) durante un intervalo de tiempo, ésta permanece “impresa” un cierto tiempo después de que el estímulo haya desaparecido.⁹
- Por este motivo, si la frecuencia de fotogramas es suficientemente elevada la desaparición del estímulo anterior puede fusionarse con la aparición del siguiente. De esta manera, puede parecernos que la imagen es fija (no parpadea), cuando en realidad no es así.
- Esto es utilizado en el cine y en la televisión donde se presentan 48 y 50 (sistema PAL) ó 60 (sistema NTCS) fotogramas/segundo respectivamente. Sin embargo, incluso a estas frecuencias es posible apreciar el parpaedo si el nivel de luminancia de los fotogramas es muy alto.

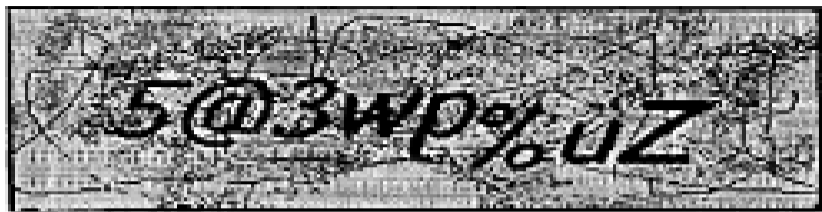
⁹Véase el programa http://www.ace.ual.es/~vruiz/docencia/imagen_y_sonido/teoria/ejecutables/optical.exe.

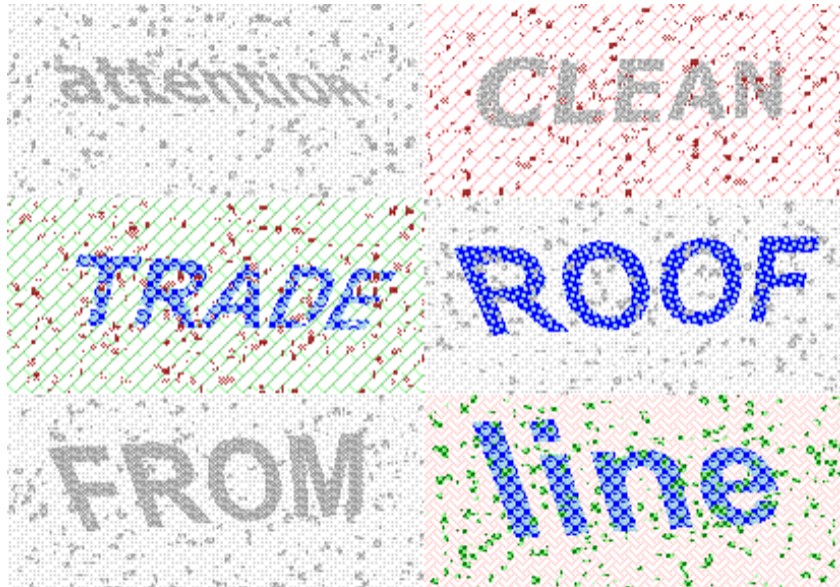
2.3.5. La sensación de movimiento

- Relacionada con la persistencia visual está la sensación de movimiento. Cuando la frecuencia de imágenes estáticas es suficiente (al menos 16 fotogramas/segundo), el SVH interpola el movimiento que falta entre fotogramas y reconstruye la escena real.
- Por ejemplo, en el cine se presentan 24 fps, aunque cada fotograma se repite una vez para evitar el parpadeo. En la TV PAL se muestran 25 fps (fotogramas por segundo) y en la TV NTSC 30 fps. En la televisión de alta definición el número de fotogramas aumenta hasta 50 fps o 60 fps [6].

2.3.6. Enmascaramiento espacial

- El SVH tiende reconocer con mayor facilidad las zonas de una imagen que tienen formas sencillas o forman texturas, frente a otras que no son más complejas (como el “ruido”). Gracias a esto existen los CAPTCHAs (Completely Automated Public Turing Test to Tell Computers and Humans Apart), imágenes que esconden la información poniendo caracteres sobre fondos ruidosos. Ejemplos:





SAMPLES FROM TELECHARGE.COM'S REGISTRATION FORM

2.3.7. Enmascaramiento temporal

- El SVH necesita un tiempo concreto para percibir la aparición de una determinada región de una imagen que antes no existía. Por ejemplo, en un partido de fútbol, cuando miramos el balón o a los jugadores, no apreciamos la textura del césped que acaba de aparecer en la imagen actual respecto de una imagen anterior, hasta que no transcurre un cierto tiempo.

2.4. Sistemas de captura y reproducción de imágenes

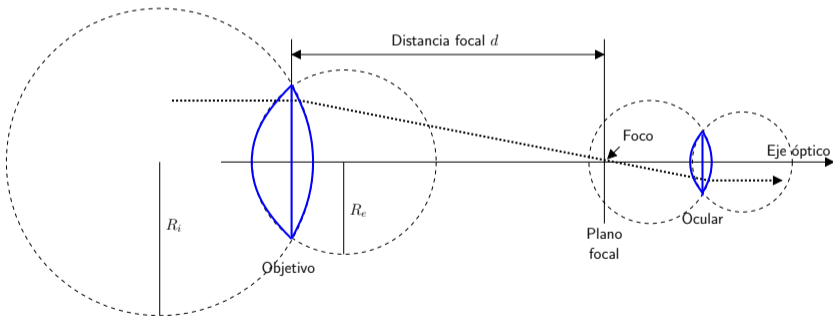
2.4.1. El telescopio

- Los historiadores cuentan que el telescopio fué inventado por el óptico holandés Hans Lippershey a primeros del siglo XVII. Sin embargo, los primeros descubrimientos astronómicos (como el descubrimiento de las fases de Venus o las principales lunas de Júpiter) corrieron a cargo de físico y astrónomo italiano Galileo Galiei. Gracias a sus observaciones descubrió que La Tierra giraba alrededor de El Sol, y no al revés como sostenía La Iglesia, y por ello fué condenado a reclusión perpetua (condena que finalmente le fue conmutada por arresto domiciliario).
- Básicamente, un telescopio es un instrumento que recoge luz y la concentra en un punto, donde ponemos el ojo, un CCD o una película fotográfica. De esta manera pueden observarse objetos que, debido a su lejanía, hacen llegar hasta nosotros una cantidad de radiación luminosa que no puede ser percibida a simple vista.

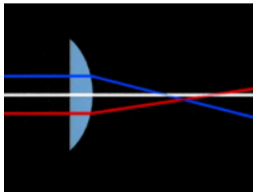
2.4 Sistemas de captura y reproducción de imágenes

2.4.1.1. El telescopio refractor

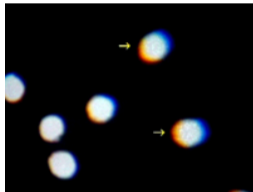
- Fue el primer tipo de telescopio inventado y es el tipo de telescopio usado por Galileo.
- Utiliza un sistema de, al menos, dos lentes convergentes (un objetivo y un ocular).



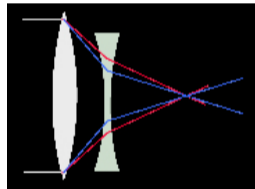
- Las combinaciones de más de una lente se utiliza para evitar la aberración cromática que, debido a que las diferentes señales electromagnéticas con diferentes longitudes de onda (colores) se refractan con distinto ángulo, provoca en los objetos observados aureolas con los colores del arcoiris [2].



Causa



Efecto



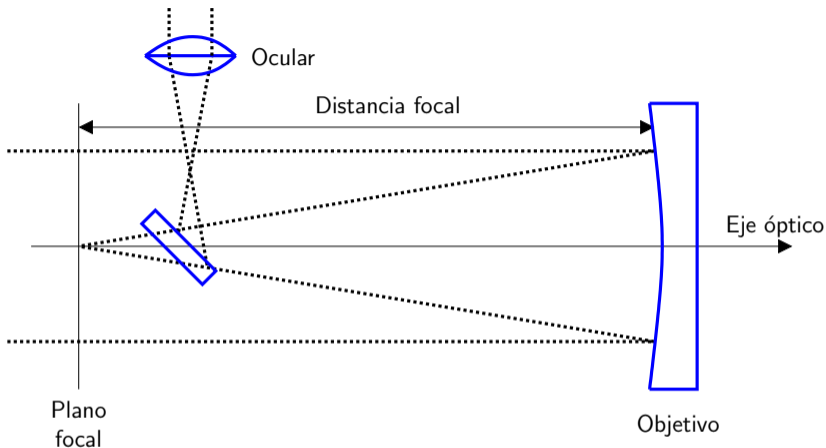
Solución



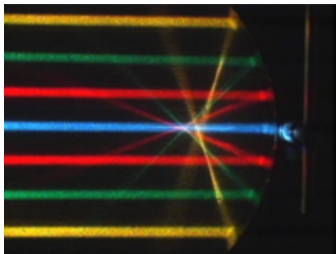
2.4 Sistemas de captura y reproducción de imágenes

2.4.1.2. El telescopio reflector

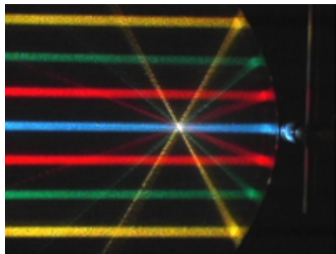
- En estos telescopios el objetivo es un espejo cóncavo y el ocular es una lente convergente.
- Hay varios tipos de telescopios reflectores:
 1. **El telescopio reflector de Newton.** En 1671 el científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés Isaac Newton colocó en el fondo de un tubo un espejo cóncavo y un pequeño espejo plano entre el objetivo y su plano focal con una inclinación de 45° para que los rayos que forman la imagen se desviaran 90° a fin de que pudiera ser observada por un ocular colocado fuera del tubo.



Al carecer de lentes (excepto en el ocular, claro), no posee aberración cromática. Sin embargo, la lente tiene que ser una parábola perfecta. Si no, se produce el efecto de la aberración esférica.



Espejo esférico



Espejo parabólico



Con aberración esférica



Sin aberración esférica



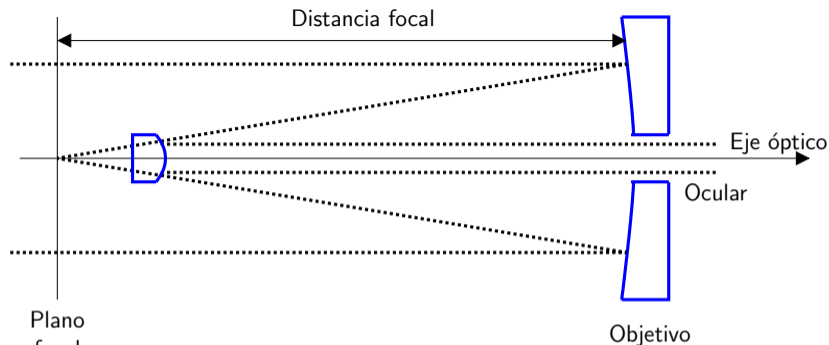
Con aberración esférica



Sin aberración esférica

Este defecto lo tuvo el telescopio espacial Hubble!

2. **El telescopio reflector de Cassegrain.** Debido al espejo inclinado, el telescopio de Newton tiene un punto ciego en el centro del objetivo. En 1962, Laurent Cassegrain aprovechó esta circunstancia para realizar un agujero en él (justo en el centro) para sacar a su través los rayos luminosos. Para ello, sustituyó el espejo plano por un espejo convexo. De esta forma podemos aumentar la distancia focal manteniendo la longitud del tubo. También presenta la ventaja de no invertir las escenas observadas (de derecha a izquierda y de arriba a abajo).



Muy posteriormente, en el siglo XX han surgido muchas variaciones del reflector de Cassagrain, como son el Schmidt-Cassegrain [13] y el Maksutov-Cassegrain [12].

2.4.1.3. Aumentos

- El número de aumentos Z de un telescopio es igual a la distancia focal del objetivo d dividida entre la distancia focal del ocular d_o .

$$Z = \frac{d}{d_o} \quad (2.1)$$

Por ejemplo, si utilizamos un telescopio de 910 milímetros de focal, con un ocular típico de 25 mm, la ampliación es de 36,4x [3].

- En un telescopio de aficionado se pueden utilizar diversos oculares intercambiables, manteniendo el mismo objetivo. Los oculares que tienen la distancia focal más corta son los que nos producen un mayor aumento. Si colocamos, además, la lente de Barlow, la distancia focal del telescopio se multiplica, multiplicándose también, lógicamente, los aumentos.
- En unos prismáticos $Z \times D$, el primer valor, Z , indica los aumentos y el segundo, D , el diámetro, en milímetros, de cada uno de los objetivos.

2.4.1.4. Distancia focal

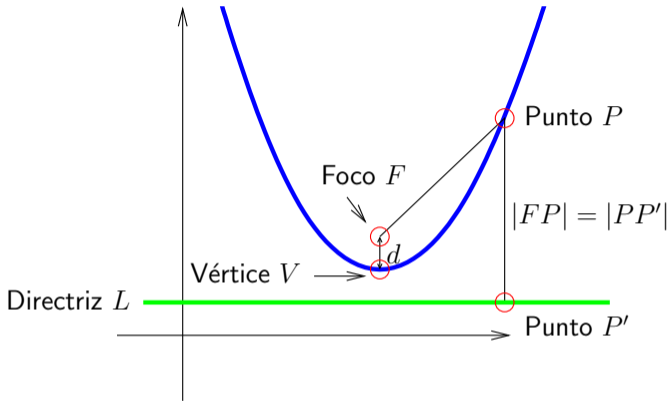
- La forma en que se calcula la distancia focal del objetivo de un telescopio depende de si es un telescopio refractor o reflector.

- Refractor.** Para una lente convergente, biconvexa, la distancia focal, esto es, la distancia desde la lente al plano focal se calcula como

$$d = \frac{R_e R_i}{(n - 1) R_e R_i}, \quad (2.2)$$

donde R_e es el radio de curvatura de la superficie externa de la lente, R_i es el radio de curvatura de la superficie interna de la lente (véase la esquema del telescopio refractor de Newton) y n es el índice de refracción de la luz que se produce en la lente, que depende de su longitud de onda de la luz y de la composición química de la lente.

2. **Reflector.** El espejo principal (objetivo) de un espejo reflector debe ser parabólico para que la luz se concentre en un único punto [2]. Por definición, una parábola es el conjunto de puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo F , llamado *foco de la parábola* que de una recta fija L , llamada *directriz de la parábola*, que no contiene al punto F [5]. El punto medio V entre el foco y la directriz se llama *vértice de la parábola*, y la recta que pasa por el foco y el vértice se llama *eje de la parábola*. Los telescopios reflectores utilizan espejos parabólicos porque cualquier rayo paralelo al eje de la parábola y reflejado en ella pasa por el foco [8].



La ecuación de una parábola responde a la expresión

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (2.3)$$

donde b y c definen la posición de V en el plano, y a define la abertura de la parábola. Cualquier parábola se puede construir

a partir de F y de L , siendo la distancia entre ambos elementos de

$$p = \frac{2}{a}. \quad (2.4)$$

Suponiendo que $b = c = 0$, es decir, que el V se encuentra en el punto $(0, 0)$, cosa que para el cálculo de la longitud focal es perfectamente asumible, la distancia de F al V (la distancia focal) es¹⁰

$$d = \frac{p}{2}. \quad (2.5)$$

¹⁰Recuérdese que el vértice está siempre a mitad de camino entre la directriz y el foco de la parábola.

2.4.1.5. Resolución

- Se llama resolución (o poder separador) de un telescopio a la capacidad de mostrar de forma individual a dos objetos que se encuentran muy juntos. La resolución está estrechamente ligada al diámetro del objetivo, dado que a mayor diámetro mayor es el poder separador del instrumento¹¹.
- La resolución no depende de la ampliación utilizada, sólo de la calidad de los elementos que componen el telescopio.

¹¹En el caso de un telescopio reflector por ejemplo, cuanto más grande es el espejo, menos son aparentes sus posibles imperfecciones, como son la aberración esférica, los arañazos, las motas de polvo, las huellas de dedos, etc.

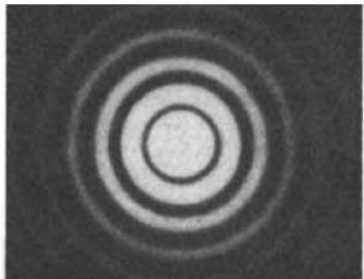
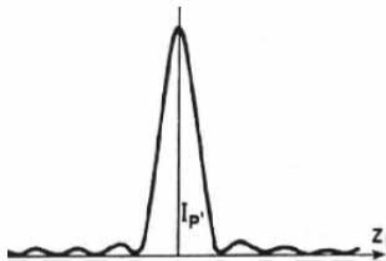


Fig.3

La fuente de luz tomada por el telescopio es puntual. La limitación en la resolución del telescopio genera un efecto conocido como la Difracción de Fraunhofer.

2.4.1.6. Luminosidad

- La luminosidad es un aspecto esencial porque cuanto más luminoso sea un telescopio, más débiles podrán ser los objetos observados. La luminosidad de un telescopio depende tanto de la luminosidad del objetivo como de la luminosidad del ocular.
- La luminosidad es inversamente proporcional a lo que se conoce como *relación focal*. La relación focal f (de un espejo o de una lente) se calcula como el cociente entre la distancia focal y su diámetro, es decir

$$f = \frac{d}{D}. \quad (2.6)$$

Por tanto, cuanto más “gordo” sea el espejo principal de un reflector o la lente principal de un refractor, es decir, cuanto mayor sea la D , más luz recogerá, y más luminoso será el telescopio.

2.4.1.7. Campo de visión de un telescopio

- Define qué cantidad de cielo podemos ver cuando miramos a través del ocular.
- El campo (o ángulo) de visión es inversamente proporcional a los aumentos del telescopio (relación entre las focales del objetivo y del ocular, recuérdese la Ecuación 2.1).

2.4.2. Objetivos fotográficos

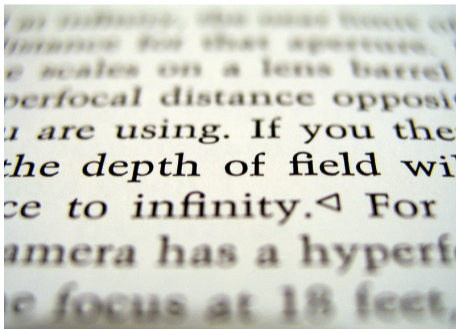
- Los objetivos fotográficos son básicamente telescopios refractores con pocos aumentos, aunque también existen objetivos reflectores de tipo Cassegrain cuando se demandan muchos aumentos. Generalmente poseen distancias focales menores (menos aumentos) que los telescopios y por tanto, grandes campos de visión.
- Los parámetros más importantes de un objetivo fotográfico son:
 1. **El rango de distancias focales (el rango de aumentos).** Se mide en milímetros. A más milímetros, más zoom.
 2. **La luminosidad.** Se mide usando la relación focal (véase la Ecuación 2.6). Los objetivos fotográficos, al poseer diafragma, poseen una D variable. A menor f , más luminosidad.

2.4.2.1. Objetivos con focal fija versus objetivos con zoom

- Como su nombre indica, los objetivos de longitud fija sólo proporcionan un valor fijo de aumentos. Por contrapartida, la calidad de imagen es generalmente superior (a mismo precio) a los que poseen zoom porque las lentes tienden a sufrir pequeños desajustes en su situación dentro del objetivo (las lentes se mueven).

2.4.2.2. El enfoque

- Los telescopios están enfocados al infinito. Los objetivos fotográficos permiten variar la distancia de enfoque, desde el infinito a unos pocos centímetros.
- Cuando un objetivo enfoca a una determinada distancia, los objetos que están a otras distancias aparecen borrosos (desenfocados).



2.4.2.3. La profundidad de campo

- La profundidad de campo es la distancia máxima a la que pueden estar los objetos separados de la distancia de enfoque, y todavía dichos objetos permanecen (parcialmente) enfocados.



Con poca profundidad



Con mucha profundidad

2.4.2.4. El tiempo de exposición

- La película fotográfica en las cámaras analógicas o el CCD en las digitales captan una cantidad de luz proporcional a la intensidad luminosa y al tiempo de exposición. Por tanto, cuando la luz es débil, el tiempo de exposición debería aumentar y viceversa.
- Si el tiempo de exposición es excesivo, la fotografía tomada se dice que está sobreimpresionada, sobreexpuesta o quemada. Si el tiempo de exposición es insuficiente, se dice que está subexpuesta.

- Los tiempos de exposición controlan, además, la definición a la que los objetos en movimiento son fotografiados.



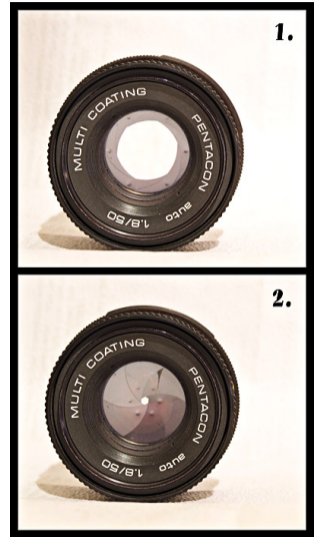
Poco tiempo



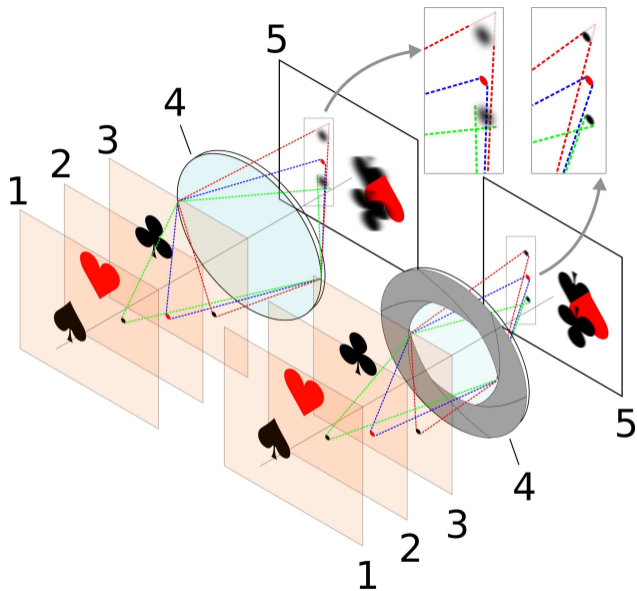
Mucho tiempo

2.4.2.5. El diafragma

- Sólo los objetivos fotográficos poseen diafragma.
- El diafragma limita la cantidad de luz que pasa a través el objetivo hacia la película fotografica o el CCD. Por tanto, si abrimos el diafragma deberíamos reducir los tiempos de exposición y viceversa.



- La abertura del diafragma controla, también, la profundidad de campo. Cuando abrimos el diafragma disminuye la profundidad de campo y viceversa. Para entender esto, imaginemos una cámara oscura, o una Web-cam, donde el tamaño del diafragma es casi puntual. En estos dos elementos, todos los objetos, a partir de una cierta distancia mínima aparecen enfocados en el plano de la película. Esto es porque la refracción de la luz apenas puede modificar la dirección de los rayos luminosos al atravesar el objetivo, ya que el diámetro del mismo es mucho menor que la distancia del objetivo al objeto. Cuando abrimos el diafragma de una cámara, aumenta el diámetro efectivo del objetivo con lo que los rayos luminosos que inciden justo en los bordes del diafragma son refractados con ángulos diferentes (mayores) a los rayos que pasan justo por el centro de la lente. Entonces, sólo aquel plano focal que converja en la película va a ser el centro del conjunto (infinito) de planos que definen la profundidad de campo. El resto de planos, al encontrarse a distintas distancias, son enfocados delante o detrás de la película [11].



2.4.2.6. Los sistemas de estabilización de imagen

- Cuando hacemos girar un disco con suficiente masa, y tratamos de cambiar su ángulo de giro notaremos que aparece una fuerza que impide dicho cambio de ángulo. Este es el principio del giroscopio.¹²
- Si hacemos que las lentes del objetivo giren a una alta velocidad y que además, las mismas tengan una cierta posibilidad de movimiento dentro del mismo, un pequeño movimiento de la cámara no se transmitirá a las lentes (están como flotando).
- Este hecho puede aplicarse para estabilizar la imagen en la película y es el principio de los estabilizadores de imagen ópticos (no digitales).

¹²Y de las peonzas, y de los trompos, y de los diabólos, y de que las ruedas no se caigan para los lados hasta que paran de girar, y de ...

2.4.3. La película fotográfica

- La película fotográfica es una emulsión que contiene una sustancia sensible a la luz como el nitrato de plata sobre una capa plástica [10].
- La película fotográfica puede ser sensible a diferentes longitudes de onda de la radiación electromagnética que incide sobre ella, incluidas las infrarrojas, las ultravioletas y los rayos X¹³.



¹³Por esto, no es una buena idea pasar la cámara por un escaner de rayos X con la película desenrollada!

2.4.3.1. Tipos de película

Las películas fotográficas se clasifican de diferentes formas, dependiendo del uso que reciben:

1. **Película en blanco y negro o en color.** La fotografía en blanco y negro usa una sola capa de nitrato de plata, mientras que las películas en color usan tres capas. En el caso del color, cada capa sólo es sensible a una gama de colores diferente. En el caso del blanco y negro la película es sensible a la cantidad de luz (luminancia).
2. **Negativo o diapositiva.** Cuando se utiliza un negativo, la película reacciona de forma inversa a la cantidad de radiación recibida. En el caso de la diapositiva, la sensibilidad es directamente proporcional. Esto tiene la ventaja de que podemos mirar directamente a través de la película (que suele ser transparente) para ver la fotografía.
3. **Película de infrarrojos o normal (visible).** Hay películas fotográficas que sólo reaccionan al calor de los objetos fotografiados.

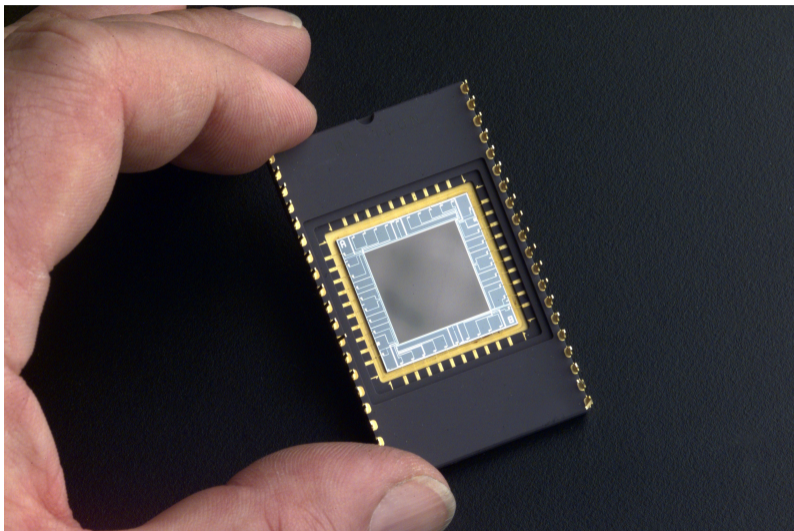
2.4.3.2. La sensibilidad de la película

- Se refiere a la cantidad de luz que debe incidir en la película fotográfica (o el CCD) para que ésta(e) se impresione.
- Se mide en ISO X , donde X suele ser un número entero. Cuando mayor es la X , más sensible es la película, aunque mayor es también el grano (inferior la resolución).
- En los CCDs ocurre algo semejante. La resolución es constante (es digital), pero cuando aumentamos los ISOs, aumenta el ruido electrónico del CCD (se hace más sensible).

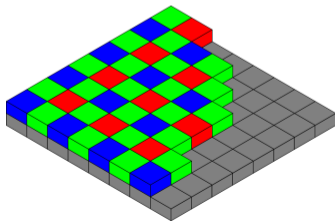


Detalle del tamaño del grano de las sales de nitrato de plata en una negativo en blanco y negro de ISO1600 [9].

2.4.4. El CCD (Charging Couple Device)

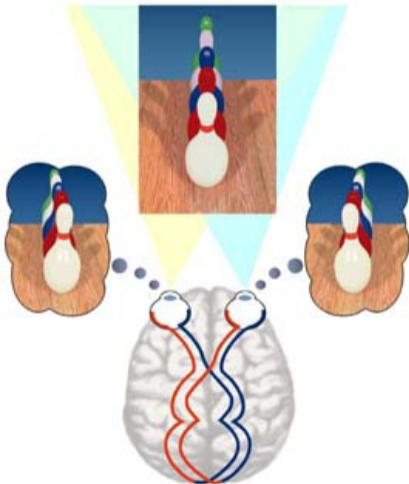


- Los CCD's (al igual que ocurre con los LED's, aunque en este caso a la inversa) se basan en el efecto fotoeléctrico. Son un array de millones de pequeñas células fotovoltaicas (normalmente condensadores a base de silicio) que acumulan electrones cuando inciden sobre ellos fotones.
- Una vez que las células se han cargado, de forma proporcional a la cantidad de luz recibida, el chip funciona como un gran registro de desplazamiento en el que cada fila de condensadores se copia de forma síncrona (sistólicamente) a la fila vecina, en una dirección. La fila que no tiene vecina para poder enviarle su contenido lo hace sobre un array de amplificadores que se conecta al bus de salida de datos del CCD.
- Para capturar color, se coloca sobre los condensadores una malla de filtros rojos, verdes y azules, que dejan pasar sólo el correspondiente tipo de luz.



2.4.5. Estereoscopía (visión en estéreo)

- La estereoscopía o visión esterescópica permite percibir la profundidad de los objetos.
- Es tan simple como hacer llegar al ojo izquierdo la imagen correspondiente al ojo izquierdo y lo mismo, para el ojo derecho.

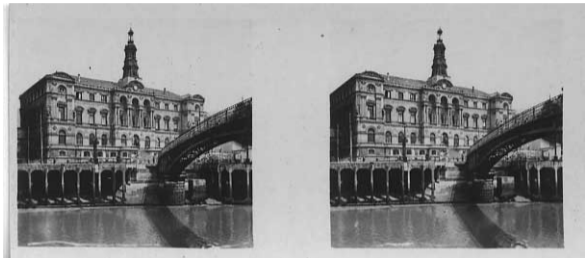


2.4.5.1. Estereoscopía con dos imágenes independientes

- Son los que mejores resultados presentan.
- Consisten en tomar dos fotos, tomadas por ejemplo con una cámara fotográfica, y presentar a cada ojo la imagen adecuada, en la posición adecuada:
 1. Usando dos diapositivas y dos visores para diapositiva. Cada ojo con su correspondiente diapositiva.



2. Usando dos objetivos y dos imágenes impresas en papel. Cada ojo con su correspondiente imagen en papel.



Estereograma en papel.

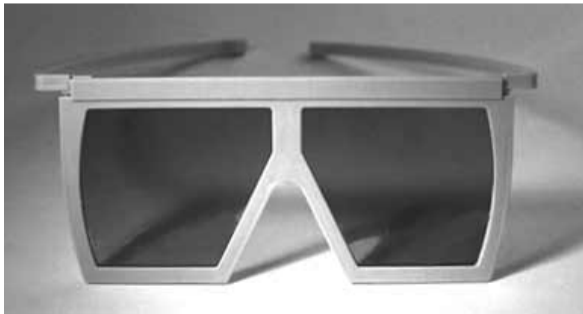


Estereoscopio para papel.

3. Usando un espejo y dos imágenes en papel. El espejo se apoya en la nariz y se mira hacia él. Un ojo ve directamente la imagen sobre el papel y el otro la ve reflejada.

2.4.5.2. Estereocopía con gafas polarizadas

- Son adecuados para ver vídeos.
- Cada ojo ve a través de un cristal polarizado una imagen que consta de dos imágenes superpuestas, aunque cada una genera luz polarizada. De esta manera cada ojo recibe sólo una imagen.
- Se usa en los cines Imax 3D.



2.4.5.3. Estereogramas con gafas de realidad virtual

- Cada ojo percibe la imagen de un display digital diferente mediante lo que se conoce como un Head Mounted Display.



2.4.5.4. Estereoscopia con gafas síncronas

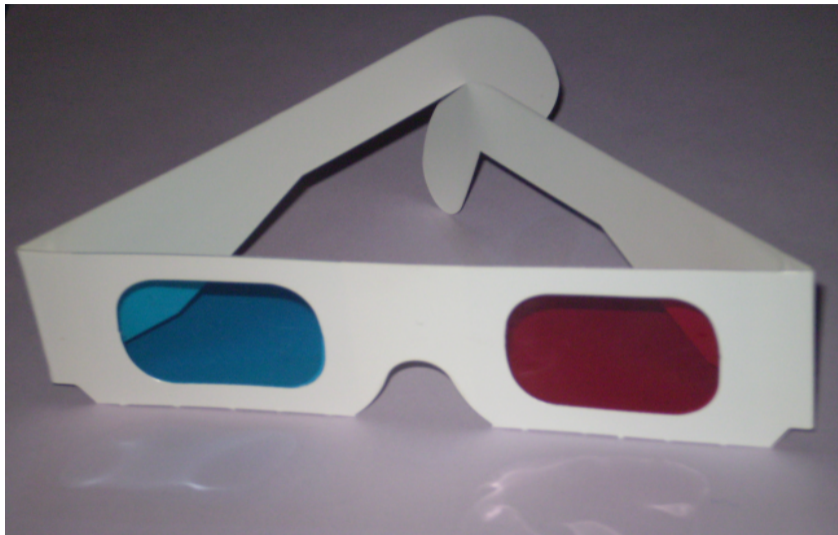
- Cada ojo percibe la imagen del mismo display, aunque las imágenes pares se presentan sólo a un ojo y las impares al otro. Las gafas poseen un cristal líquido negro que tapa cada ojo de forma síncrona con el monitor. Si el número de imágenes/segundo no es suficiente, se nota parpadeo.



2.4.5.5. Estereoscopia con anáglifos

- Usando unas gafas con filtros paso banda, cuyos colores (banda de frecuencia) están en los lados opuestos de la circunferencia de colores (anáglifo), hacemos llegar a cada ojo la imagen correspondiente.





Unas gafas para ver anáglifos.



Un anáglifo.

2.4.5.6. Estereoscopia con auto-estereogramas de puntos aleatorios



- Consiste en dibujar puntos, que a primera vista parecen colocados de forma aleatoria, pero que cuando son percibidos en distintas posiciones por cada ojo cuando se enfoca la vista dentro de la imagen, generan una sensación de 3D.
- Si nos fijamos, todos los estereogramas tienden a ser periódicos en el eje horizontal. Esto se aprovecha para pintar de forma conveniente los puntos “aleatorios” de manera que al percibirse (enfocando dentro de la imagen) dan una sensación de profundidad.

2.4.5.7. Monitores estéreo

- Se basan en colocar una lámina transparente lenticular vertical, de manera que la luz que parte de las columnas impares se refracta en una dirección y la luz que parte de las columnas pares en otra dirección. El espectador debe colocarse enfrente de la pantalla y a una distancia concreta, para permitir que cada haz de luz entre al correspondiente ojo. Hay cierta flexibilidad con la altura del espectador frente al monitor.
- También hay versiones donde la sensación de estereo depende de si miramos hacia arriba y hacia abajo. En este tipo de monitores la lente lenticular es concéntrica y el espectador sólo puede estar, además, a una altura determinada del monitor.

Parte II

Digitalización de señales

Capítulo 3

Análisis de Fourier

3.1. ¿Para qué se utiliza?

- El análisis de Fourier [27] es una herramienta matemática que permite expresar una función $f(t)$ en relación a un conjunto de funciones ortogonales $g_i(t)$, mediante una combinación lineal de éstas. Es decir,

$$f(t) = \sum_i a_i g_i(t).$$

- Eligiendo convenientemente el conjunto de funciones ortogonales podemos realizar un análisis de $f(t)$ en función de las características o propiedades de las funciones $g_i(t)$.
- Una de las aplicaciones prácticas más frecuentes del análisis de Fourier es la **representación de señales en función de sus componentes de frecuencia**. Esto se consigue cuando las funciones base son sinusoides.

3.2. La serie trigonométrica de Fourier

- Permite representar una función como una suma de funciones sinusoidales.
- Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$. La serie trigonométrica de Fourier permite representar $f(t)$ en términos del conjunto ortogonal completo de funciones senoidales [30]

$$\{1; \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \cos(n\omega_0 t), \dots; \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots, \sin(n\omega_0 t), \dots\}$$

mediante la combinación lineal

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \quad (3.1)$$

donde

$$t_0 < t < t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0},$$

ω_0 es la componente de frecuencia fundamental expresada en radianes por segundo y a_0 , a_n y b_n son los coeficientes la **serie trigonométrica de Fourier**.

- Nótese que dicha sumatoria sólo puede reproducir el comportamiento de una función (o una señal) en un intervalo (de tiempo) igual a

$$\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Tal y como se acaba de definir, dicho intervalo es igual al periodo de la componente de frecuencia más baja que existe en la señal.

3.2.1. Los coeficientes de Fourier

- Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier expresan la cantidad de “señales sinusoidales puras” que deben sumarse entre sí para obtener la señal analizada.
- Matemáticamente, se calculan como la proporción que existe entre la energía de la correlación de la señal con la respectiva función sinusoidal y la energía de esa función sinusoidal, es decir

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega_0 t) dt} \quad (3.2)$$

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(n\omega_0 t) dt} \quad (3.3)$$

siendo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

- Para $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad (3.4)$$

que como podemos apreciar es el valor medio de $f(t)$ en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$. Se dice que a_0 es la componente de corriente directa o DC (Direct Current) de $f(t)$ en dicho intervalo.

- Por otra parte, sabiendo que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega_0 t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(n\omega_0 t) dt = \frac{T}{2},$$

las Ecuaciones 3.2 y 3.3 también se pueden reescribir de la forma

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3.5)$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (3.6)$$

que suele ser la más común en la bibliografía [27, 30].

3.3. La serie exponencial de Fourier

- Es una representación más compacta de la Expresión 3.1, escrita en función de la exponencial compleja.
- Sean las definiciones

$$\begin{aligned}a_0 &= F_0 \\a_n &= F_n + F_{-n} \\b_n &= j(F_n - F_{-n}),\end{aligned}\tag{3.7}$$

siendo $j = \sqrt{-1}$.

Si sustituimos dichas definiciones en la Ecuación 3.1, obtenemos que

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((F_n + F_{-n}) \cos(n\omega_0 t) + (j(F_n - F_{-n})) \sin(n\omega_0 t)).$$

Multiplicando llegamos a que

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \cos(n\omega_0 t) + F_{-n} \cos(n\omega_0 t) + jF_n \sin(n\omega_0 t) - jF_{-n} \sin(n\omega_0 t) \right).$$

Operando

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n (\cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)) + F_{-n} (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) \right).$$

Aplicando ahora los cambios trigonométricos

$$\begin{aligned} e^{jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t) \\ e^{-jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

en la anterior expresión obtenemos que

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right).$$

Operando con el signo de la variable n y deshaciendo parcialmente la sumatoria llegamos a que

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{j(-n)\omega_0 t} \right) \\ &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Finalmente, juntando las dos sumatorias y el término que quedaba fuera nos queda que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (3.9)$$

- La Ecuación 3.9 es conocida como la **serie exponencial de Fourier** y a los F_n como los coeficientes de dicha serie.

3.3.1. Los coeficientes complejos de Fourier

- Usando las definiciones realizadas en la Expresión 3.7 es posible encontrar fácilmente que

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n). \quad (3.10)$$

- Sustituyendo en esta ecuación las Expresiones 3.5 y 3.6 tenemos que

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4. Representación de una función periódica mediante la serie de Fourier en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$

- Hasta ahora hemos encontrado que es posible representar cualquier función $f(t)$ en un intervalo finito $(t_0, t_0 + T)$ mediante cualquiera de sus series de Fourier. Fuera de dicho intervalo, $f(t)$ y su serie de Fourier no son necesariamente iguales.
- Sin embargo, si la función es periódica entonces su representación en serie puede ser aplicada a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Esto se puede demostrar fácilmente si tenemos en cuenta que las funciones base son periódicas ya que

$$e^{j\pi\omega_0 t} = e^{j\pi\omega_0(t+T)},$$

donde recordemos, $T = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Dicho resultado implica que las Expresiones 3.1 y 3.9 (ambas series) son válidas para todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ cuando $f(t)$ es periódica.

3.5. El espectro complejo de Fourier

- El desarrollo en serie de Fourier de una función periódica equivale realmente a la transformación de la función en términos de sus componentes de frecuencia angulares

$$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$$

siendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y T el periodo de dicha función. Por tanto, disponemos de dos representaciones equivalentes de una misma función: la del **dominio del tiempo** y la del **dominio de la frecuencia**.

- A la representación en el dominio de la frecuencia, es decir, cuando indicamos las amplitudes de las diferentes componentes de frecuencia es a lo que llamamos **espectro**, que para todas las funciones periódicas es discreto (las funciones se reconstruyen a partir de sus componentes de frecuencia utilizando una sumatoria, no una integral).

- Cuando utilizamos la serie exponencial de Fourier (Ecuación 3.9) las componentes de frecuencia angulares son

$$0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$$

y las correspondientes amplitudes del espectro complejo¹

$$F_0, F_{\pm 1}, F_{\pm 2}, \dots$$

Puesto que dichas magnitudes son complejas, se las puede describir también en función de su magnitud (o módulo) y fase.

¹Recuérdese la expresión 3.10.

3.6. Representación de una función cualquiera en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$: la transformada de Fourier

- En este punto hemos aprendido a representar cualquier función $f(t)$ en términos de una serie exponencial (o trigonométrica) en un intervalo finito, y que para el caso especial en que dicha función es periódica, se puede extender su representación a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- Conociendo esto, para tratar con señales no periódicas podemos utilizar el hecho de que cualquier función no periódica se la puede considerar como tal (es decir, periódica) si suponemos que tiene un periodo infinito, es decir, si $T = \infty$.

- Sea $f_T(t)$ una función de periodo T y sea $f(t)$ una función no periódica. Definamos $f_T(t)$ de forma que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t),$$

es decir, que deja de ser periódica sólo cuando su periodo tiende a infinito. Por ser $f_T(t)$ periódica existe su serie exponencial de Fourier que es de la forma (véase la Expresión 3.9)

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.12)$$

donde los coeficientes de Fourier (usando la Expresión 3.11) son

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.13)$$

- El término F_n representa la amplitud de la componente de frecuencia $n\omega_0$, donde recordemos, la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Cuando

T aumenta, ω_0 disminuye y el espectro se vuelve más denso. También ocurre (véase la Ecuación 3.13) que se reduce la amplitud de cada componente.

- Cuando $T = \infty$, los F_n se vuelven infinitésimamente pequeños pero también existe un número infinito de componentes espectrales. Bajo estas condiciones, el espectro existe para cualquier valor de ω y ya no es un espectro discreto sino continuo. Resaltaremos esta idea con el cambio de notación

$$n\omega_0 = \omega_n,$$

con lo que las Ecuaciones 3.12 y 3.13 quedan como

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t}$$

y

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt.$$

Como F_n es función de ω_n , también haremos el cambio de notación

$$F_n = F_n(\omega_n)$$

con lo que estas ecuaciones se escriben como

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\omega_n) e^{j\omega_n t}$$

y

$$F_n(\omega_n) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt.$$

Por último, sea por definición

$$F_n(\omega_n) = \frac{F(\omega_n)}{T},$$

con lo que las Ecuaciones 3.12 y 3.13 finalmente quedan como

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (3.14)$$

y

$$F(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)e^{-j\omega_n t} dt. \quad (3.15)$$

(recuérdese que el rango de integración es ahora $(-\infty, \infty)$).

- Si sustituimos $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ en 3.14 obtenemos que

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)e^{j\omega_n t}\omega_0. \quad (3.16)$$

Como ya hemos indicado, cuando $T \rightarrow \infty$, $f_T(t) = f(t)$, $\omega_0 \rightarrow 0$ y existe un número infinito de términos ω_n . Por tanto, la suma discreta de la Ecuación 3.16 se convierte en una integral (con lo que desaparecen los subíndices sobre n) y ω_0 debe representarse por $d\omega$. Así, la Ecuación 3.16 queda como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.17)$$

y la Ecuación 3.15 como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.18)$$

- La función $F(\omega)$ representa las amplitudes de las infinitas componentes espectrales de $f(t)$ y se conoce como *función de densidad espectral*.
- Las Ecuaciones 3.17 y 3.18 se conocen como el par de transformadas de Fourier. Se dice que 3.18 es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y que 3.17 es la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$.
- Nótese que, según la transformada de Fourier, cuando las señales son aperiódicas su espectro es continuo (denso). Por el contrario, la transformada de Fourier de una señal periódica (que coincide con su representación mediante una de las series de Fourier) genera un espectro discreto (véase la Ecuación 3.9).

- Resumiendo: Fourier razonó que una señal sin periodo puede ser considerada como periódica si se le supone un periodo infinito [30]. De manera más precisa, en la representación en serie de Fourier de una señal periódica, conforme el periodo se incrementa, la frecuencia fundamental disminuye y las componentes relacionadas armónicamente² en la frecuencia se hacen más cercanas. A medida que el periodo se hace infinito, las componentes de frecuencias forman un continuo y la suma en serie de Fourier se convierte en la integral [27].

²Todas son múltiplos de la frecuencia fundamental ω_0 .

3.7. Representación de una señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia

- Si la función (o señal) $F(\omega)$ es la transformada (directa) de Fourier de la función (o señal) $f(t)$, lo que notaremos mediante

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega),$$

entonces $F(\omega)$ representa las amplitudes relativas de las diferentes componentes exponenciales complejas. Ambas representaciones (la del tiempo $f(t)$ y la de la frecuencia $F(\omega)$) especifican de forma única a la misma función (o señal).

- Como ya sabemos (Eq. 3.18), en general $F(\omega)$ es compleja, es decir, su representación módulo-argumento es

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\phi(\omega)},$$

donde $|F(\omega)|$ es el módulo o magnitud de $F(\omega)$ y se calcula como

$$|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(\omega)^2 + \text{Im}(\omega)^2}, \quad (3.19)$$

y donde $\phi(\omega)$ es el argumento o fase de $F(\omega)$ y se calcula como

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}, \quad (3.20)$$

siendo

$$F(\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega). \quad (3.21)$$

Por tanto, en general se necesitan ambos diagramas (el módulo y la fase) para representar gráficamente a $F(\omega)$.

3.8. Los módulos de los espectros de las funciones reales son simétricos

- En el análisis de señales, todas las transformadas de Fourier que se realizan son necesariamente a funciones reales (sin componente imaginaria).
- Cuando $f(t)$ es real, entonces

$$F(\omega) = F^*(-\omega), \quad (3.22)$$

y como consecuencia

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|, \quad (3.23)$$

es decir, el módulo del espectro de $f(t)$ es simétrico respecto de la frecuencia 0.

Demostración

- Si aplicamos el Cambio 3.8 en la Ecuación 3.18 obtendremos que

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

- Por otra parte, usando el mismo cambio pero para $-\omega$

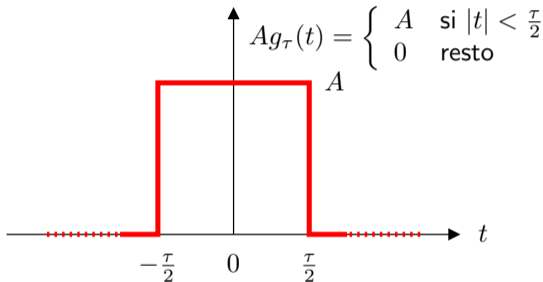
$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

- Por tanto, se cumple que

$$F(\omega) = F^*(-\omega).$$

3.9. Transformada de Fourier de la función pulso rectangular

Sea la función



Determinése su espectro de Fourier.

Aplicando la Ecuación 3.18 tenemos que

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega t} dt \\&= \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\&= \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}})\end{aligned}$$

(Teniendo en cuenta que $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin(x)$.)

$$\begin{aligned}&= A\tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} \\&= A\tau \text{Sinc}(\omega \frac{\tau}{2}).\end{aligned}$$

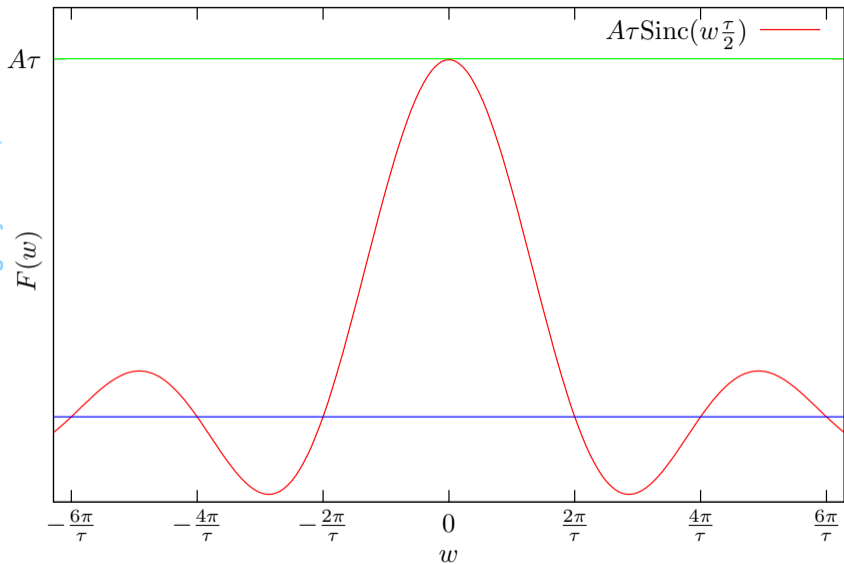
La función

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

se llama *función muestreo* y es muy importante en la Teoría de la Comunicación de Señales [27].

Nótese que $F(\omega)$ es una función real y por tanto se puede representar gráficamente mediante una única curva.³

³Si se tratara de una función compleja, representaríamos el módulo del espectro y su fase.



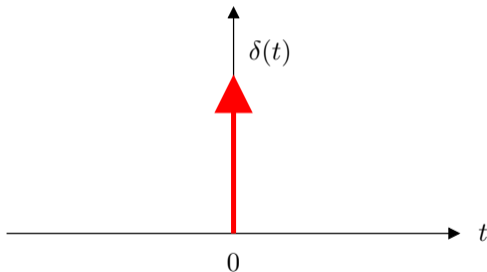
Nótese además que si $\tau \rightarrow \infty$ entonces el espectro tiende a convertirse en un impulso en $\omega = 0$ y si $\tau \rightarrow 0$ entonces el espectro tiende a convertirse en una función constante.

Capítulo 4

Teoría de señales

4.1. La función impulso unitario (delta de Dirac)

- La función impulso unitario [27] juega un papel determinante en la teoría de la comunicación de señales y en concreto en el teorema del muestreo. Se define como:



y cumple que

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{resto,} \end{cases} \quad (4.1)$$

es decir, que el area bajo su curva es 1 aunque se trate de un pulso infinitamente estrecho y con amplitud infinita. Por el mismo motivo se tiene, por definición, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0), \quad (4.2)$$

y de la misma forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0). \quad (4.3)$$

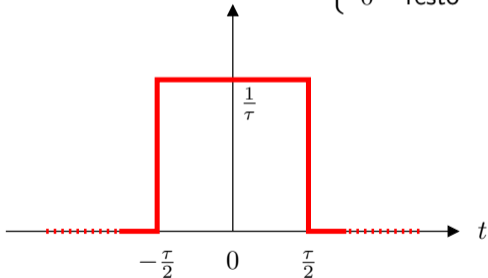
- En virtud de estas definiciones podríamos decir que la función impulso unitario es capaz de calcular el valor de una función en el punto en que se aquella se define.

4.1.1. Obtención de la función impulso unitario

- La función impulso unitario es una función físicamente imposible de generar y que se obtiene en el límite de otras funciones:

1. A partir de una función rectangular:

$$h_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



tomando

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} h_{\tau}(t) = \delta(t).$$

2. A partir de la función muestreo:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \text{Sinc}(\tau t). \quad (4.4)$$

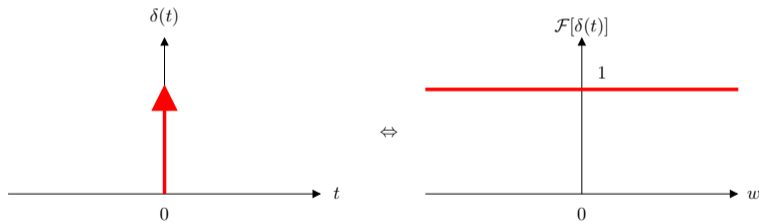
Nótese que cuando τ aumenta, la función muestreo se compacta en $t = 0$ (véase la Sección 3.9).

4.2. Transformada de Fourier de la función impulso unitario

La transformada de Fourier de la función impulso unitario es 1. Es decir,

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1. \quad (4.5)$$

Gráficamente:



Demostración

Por definición de la transformada de Fourier (Ec. 3.18) se tiene que:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt$$

(Aplicando las Eqs. 4.2 y 4.1)

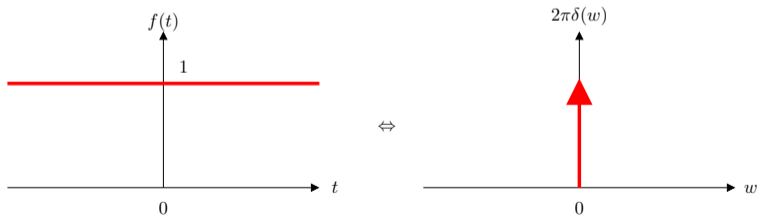
$$= \underbrace{e^{-j\omega 0}}_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt}_1 = 1.$$

4.3. Transformada de Fourier de la función constante

La transformada de Fourier de la función constante 1 es la función impulso, multiplicada por 2π . Es decir,

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega). \quad (4.6)$$

Gráficamente:



Demostración

- Como sabemos, la transformada de Fourier de una función rectangular es la función Sinc, es decir

$$\mathcal{F}[g_\tau(t)] = \tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau}{2}w\right). \quad (4.7)$$

- Por otra parte, la función rectangular tiende a convertirse en una función constante cuando $\tau \rightarrow \infty$, es decir

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_\tau(t) = 1. \quad (4.8)$$

- En consecuencia, la transformada de Fourier de la función constante 1 es la transformada de Fourier de una función rectangular $g_\tau(t)$, cuando $\tau \rightarrow \infty$, es decir

$$\mathcal{F}[1] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau}{2}w\right) =$$

(multiplicando y dividiendo por 2π)

$$= 2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\tau}{2}w\right)$$

(aplicando la Expresión 4.4 para $\frac{\tau}{2}$)

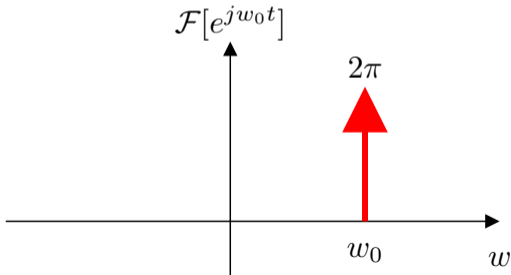
$$= 2\pi\delta(w).$$

4.4. Transformada de Fourier de la función exponencial compleja

- La transformada de Fourier de la función exponencial compleja de frecuencia w_0 es un impulso unitario de energía 2π en w_0 ,

$$\mathcal{F}[e^{jw_0t}] = 2\pi\delta(w - w_0). \quad (4.9)$$

- Gráficamente:



Demostración

Por definición

$$\mathcal{F}[e^{jw_0t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_0t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - w_0)t} dt.$$

Si tenemos en cuenta la Ecuación 4.6 y sustituimos para $\omega = \omega - w_0$ obtenemos que

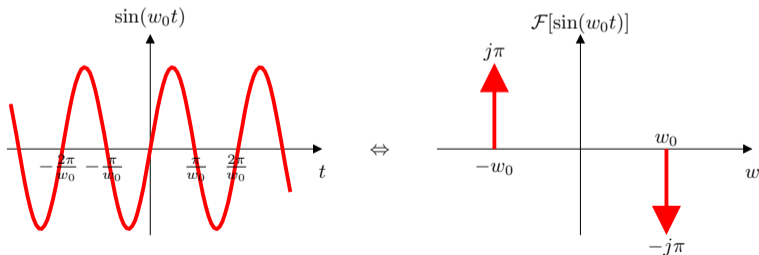
$$\mathcal{F}[e^{jw_0t}] = 2\pi\delta(\omega - w_0).$$

4.5. Transformada de Fourier de la función seno

- La transformada de Fourier de la función seno de frecuencia w_0 son dos impulsos de energía $j\pi$, uno positivo en $-w_0$ y otro negativo en w_0 , es decir

$$\mathcal{F}[\sin(w_0 t)] = j\pi(\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)). \quad (4.10)$$

Gráficamente:



Demostración

Como sabemos,

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}. \quad (4.11)$$

Por tanto,

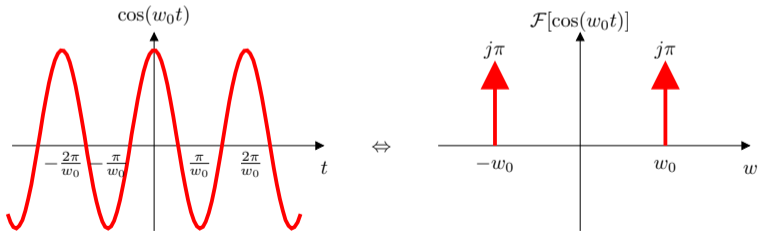
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] &= \frac{1}{2j} (\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] - \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}]) \\ &= \frac{1}{2j} (2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)) \\ &= j\pi (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)). \end{aligned}$$

4.6. Transformada de Fourier de la función coseno

- La transformada de Fourier de la función coseno de frecuencia w_0 son dos impulsos positivos de energía $j\pi$, uno en $-w_0$ y otro en w_0 , es decir

$$\mathcal{F}[\cos(w_0 t)] = j\pi(\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)). \quad (4.12)$$

Gráficamente:



Demostración

Como sabemos,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2j}. \quad (4.13)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \frac{1}{2j} (\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}]) \\ &= \frac{1}{2j} (2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)) \\ &= j\pi (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)). \end{aligned}$$

4.7. Transformada de Fourier de una función periódica

- Como ya sabemos, podemos expresar cualquier función periódica $f(t)$ mediante su serie exponencial de Fourier (Ec. 3.9):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}.$$

- La transformada de Fourier de una función periódica es (tomando la transformada de Fourier en ambos miembros de la ecuación anterior) la suma de las transformadas de Fourier de cada una de sus componentes (nótese que los F_n son las amplitudes de las exponenciales complejas y por tanto no dependen de t).

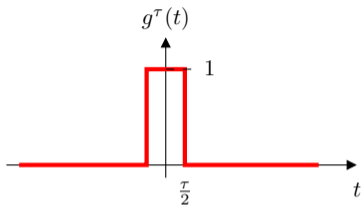
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}].\end{aligned}$$

Aplicando ahora la Expresión 4.9 llegamos a que

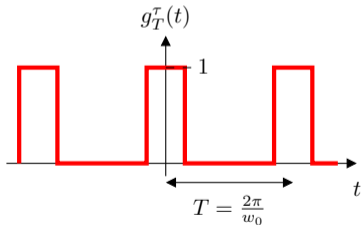
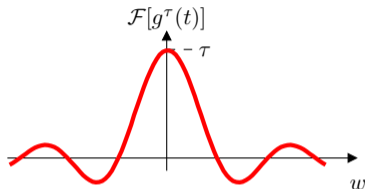
$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0). \quad (4.14)$$

- Esta relación es muy importante porque establece que la función de densidad espectral (la transformada de Fourier) de una señal periódica está compuesta por impulsos localizados en las frecuencias armónicas (frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental ω_0) de dicha señal, siendo la energía de cada impulso 2π multiplicado por el valor del coeficiente correspondiente de la serie exponencial de Fourier.

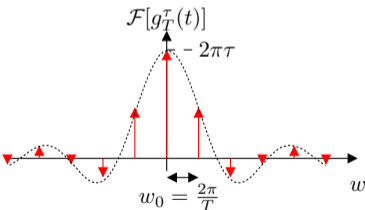
- Gráficamente (para el caso de la función rectangular):



\Leftrightarrow



\Leftrightarrow



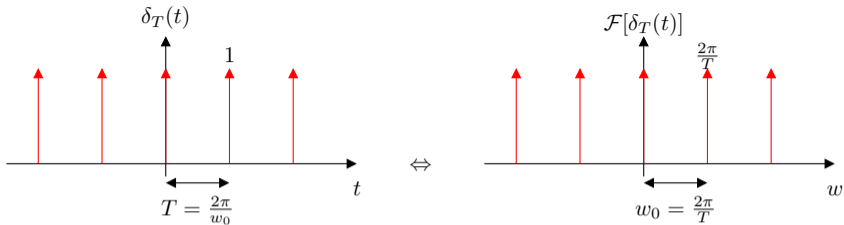
4.8. Transformada de Fourier de un tren de impulsos unitarios equidistantes

- La función tren de impulsos unitarios equidistantes es muy importante en la teoría del muestreo porque representa matemáticamente el proceso de muestreo de las señales.
- Sea la función tren de impulsos unitarios

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (4.15)$$

Entonces, su transformada de Fourier es otro tren de impulsos

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_0) = w_0 \delta_{w_0}(w). \quad (4.16)$$



- Nótese que a medida que T aumenta el espectro se vuelve más denso y decrece su amplitud.

Demostración

La serie exponencial de Fourier de $\delta_T(t)$ es

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde recordemos

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

La función $\delta_T(t)$ en el intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ es simplemente $\delta(t)$. Por tanto

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Por la forma en que se define la función impulso unitario se tiene que

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Aplicando ahora la definición de la función $\delta(t)$ (Expresión 4.2) se tiene que

$$F_n = \frac{e^{jn\omega_0 0}}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

y por tanto, que

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}.$$

Para encontrar su transformada de Fourier recurrimos a la Ecuación 4.14. Así llegamos a que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta_T(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega).\end{aligned}$$

4.9. Transformada de Fourier de una función desplazada en el tiempo

Si

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$$

entonces

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(w)e^{-j\omega t_0}. \quad (4.17)$$

Es decir, desplazar una función en el tiempo equivale a multiplicar en el dominio de la frecuencia por la función exponencial compleja.

Demostración

Por definición de transformada de Fourier se tiene que

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt.$$

Sea $x = t - t_0$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \cdot e^{-j\omega t_0} \\ &= F(\omega)e^{-j\omega t_0}.\end{aligned}$$

4.10. Transformada inversa de Fourier de una función desplazada en la frecuencia

Si

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$$

entonces

$$F(w - w_0) = \mathcal{F}[f(t)e^{jw_0t}]. \quad (4.18)$$

Es decir, desplazar el espectro de una función equivale a multiplicar dicha función en el dominio del tiempo por una exponencial compleja.

Demostración

Por definición de transformada de Fourier se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)e^{jw_0t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{jw_0t}]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-w_0)t} dt\end{aligned}$$

(Por definición de transformada de Fourier para $\omega = \omega - w_0$)

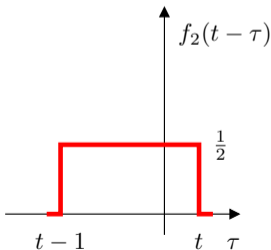
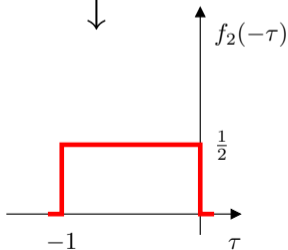
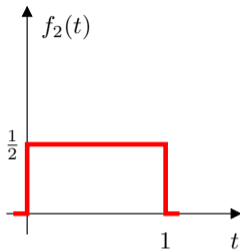
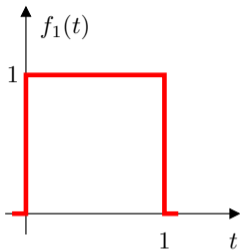
$$= F(\omega - w_0).$$

4.11. Convolución de funciones

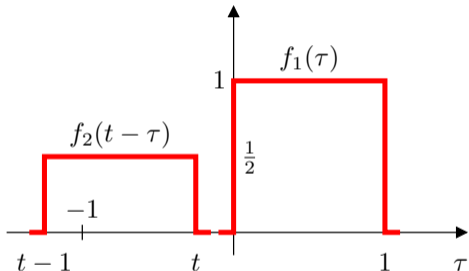
- Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones. Su convolución $f_1(t) * f_2(t)$ se define como [20]

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (4.19)$$

Ejemplo

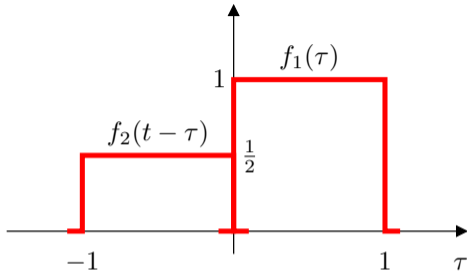


- La convolución de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se calcula para los distintos valores de t que desplaza a $f_2(t - \tau)$ en t (segundos, por ejemplo) y calculando el área de superposición de las funciones. Así:
 - Si $t < 0$ tenemos el caso:



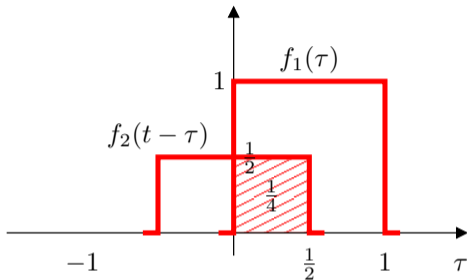
y como puede apreciarse, no existe solapamiento, es decir $f_1(\tau)f_2(t - \tau) = 0$.

2. Si $t = 0$:



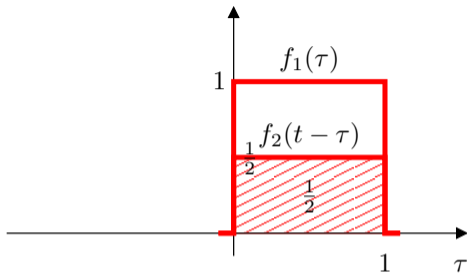
comienza a existir solapamiento.

3. Si $t = 1/2$:



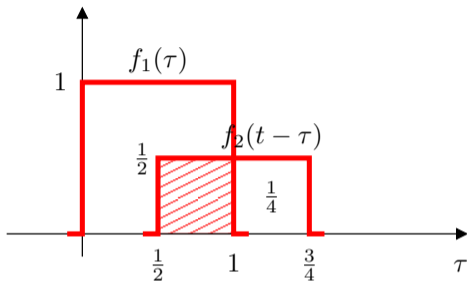
el area de solapamiento es $1/4$.

4. Si $t = 1$:



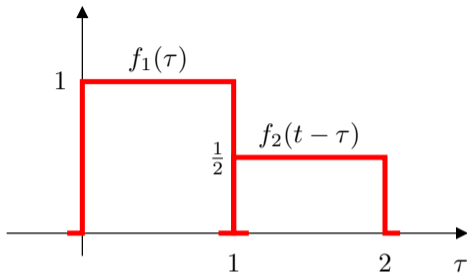
el area es $1/2$.

5. Si $t = 3/4$:



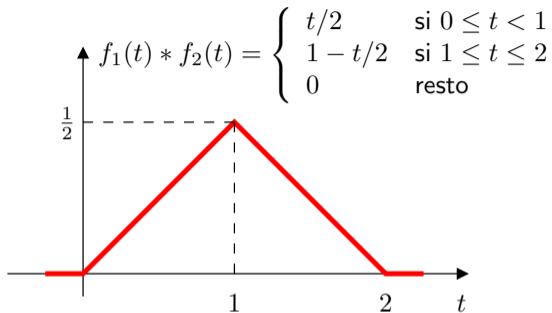
el area de solapamiento es $1/4$.

6. Si $t = 2$:



el area de solapamiento vuelve a ser 0.

- Por tanto:



4.12. El teorema de convolución en el dominio del tiempo

- Establece que la convolución de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en el dominio del tiempo equivale al multiplicar sus espectros $F_1(w)$ y $F_2(w)$, es decir,

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(w)F_2(w)]. \quad (4.20)$$

Demostración

Por definición de la transformada de Fourier y de la operación de convolución se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F_2(\omega) e^{-j\omega\tau}} d\tau.\end{aligned}$$

Nótese que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f_2(t - \tau)\}$$

y aplicando la Expresión 4.17 llegamos a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-j\omega\tau}.$$

4.12 El teorema de convolución en el dominio del tiempo

Por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(w)e^{-jw\tau} d\tau \\ &= F_2(w) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)e^{-jw\tau} d\tau \\ &= F_1(w)F_2(w).\end{aligned}$$

4.13. El teorema de convolución en el dominio de la frecuencia

- Establece que la multiplicación de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en el dominio del tiempo equivale (salvo por un factor de escala) al convolucionar sus espectros $F_1(w)$ y $F_2(w)$, es decir,

$$f_1(t)f_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} (F_1(w) * F_2(w)) \right]. \quad (4.21)$$

Demostración

Por definición de la transformada inversa de Fourier (Eq. 3.17)

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} (F_1(w) * F_2(w)) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} (F_1(w) * F_2(w)) \right] e^{j\omega t} d\omega$$

Por definición de convolución (Eq. 4.19)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) F_2(w - \tau) d\tau \right) \right] e^{j\omega t} d\omega$$

reordenando

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w - \tau) e^{j\omega t} d\omega \right] d\tau.$$

Si utilizamos ahora la Eq. 4.18 y aplicamos la transformada inversa de Fourier llegamos a que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w - \tau) e^{j\omega t} d\omega = f_2(t) e^{j\tau t}.$$

4.13 El teorema de convolución en el dominio de la frecuencia

Por tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior tenemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}(F_1(w) * F_2(w))\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) f_2(t) e^{j\tau t} d\tau$$

reordenando

$$= f_2(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) e^{j\tau t} d\tau \right]$$

aplicando, de nuevo, la transformada inversa de Fourier (Eq. 3.17)

$$= f_2(t) f_1(t).$$

4.14. Convolución de una función con la función impulso unitario

La convolución de una función $f(t)$ con la función impulso unitario $\delta(t)$ resulta en la misma función $f(t)$. Es decir,

$$f(t) * \delta(t) = f(t). \quad (4.22)$$

Demostración

Como sabemos, por el teorema de convolución en el tiempo

$$f(t) * \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)\Delta(w)].$$

También sabemos de la Eq. 4.5 que $\Delta(w) = 1$, por lo que necesariamente

$$f(t) * \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)] = f(t).$$

4.15. Convolución con la función impulso unitario desplazada

- La convolución de una función $f(t)$ con la función impulso unitario desplazada en el tiempo $\delta(t - t_0)$ resulta la misma función $f(t)$ desplazada en el tiempo. Es decir,

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0). \quad (4.23)$$

Demostración

Aplicando el teorema de convolución en el tiempo (Eq. 4.20) y la Eq. 4.17 llegamos a que

$$\begin{aligned}f(t) * \delta(t - t_0) &= \mathcal{F}^{-1}[F(w)(\Delta(w)e^{-j\omega t_0})] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[(F(w)e^{-j\omega t_0})\Delta(w)]\end{aligned}$$

(teniendo en cuenta, de nuevo, la Eq. 4.17)

$$\begin{aligned}&= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t - t_0)] \underbrace{\Delta(w)}_1] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t - t_0)]] \\ &= f(t - t_0).\end{aligned}$$

Capítulo 5

Muestreo de señales

5.1. ¿Qué es una señal?

- Una señal es cualquier perturbación física medible que transporta información.

Ejemplo 5.1: Una señal de audio afecta a la presión que el aire ejerce sobre la membrana de un micrófono. Una señal de audio puede medirse como el desplazamiento que sufre la membrana respecto de su posición de equilibrio.

Ejemplo 5.2: En el caso de una imagen, una señal luminosa afecta al tipo y cantidad de radiación luminosa que alcanza un dispositivo sensible a la luz, como puede ser una película fotográfica.

- En cualquier caso, una señal expresa **variaciones continuas** de una magnitud física.

5.2. ¿Qué obtenemos cuando muestreamos?

- La naturaleza continua de las señales hace imposible su manipulación mediante sistemas digitales. Por este motivo previamente se digitalizan.
- El muestreo es la primera etapa que se realiza cuando digitalizamos señales [30].

Ejemplo 5.3: Una señal de audio muestreada es igual a la señal de audio original en aquellos puntos donde se toma cada muestra.

Ejemplo 5.4: En el caso de una imagen estática (la que tomamos con una cámara de fotos), el muestreo produce una matriz bidimensional de muestras recogidas en diferentes puntos espaciales.

Ejemplo 5.5: Para una señal de vídeo muestreamos tanto en el dominio del espacio como en el del tiempo. Así lo que ob-

tendríamos sería una secuencia de imágenes como la del caso anterior.

5.3. El teorema del muestreo uniforme

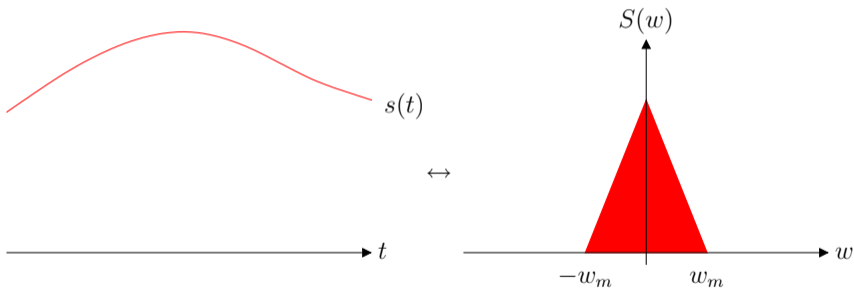
- Sea $s(t)$ una señal limitada en banda, que no tiene componentes espectrales mayores que la frecuencia f_m Hz. El teorema del muestreo uniforme indica que $s(t)$ queda determinada de forma única (sin pérdida de información) por sus valores en intervalos uniformes de tiempo menores o iguales que $\frac{1}{2f_m}$ segundos [27]. Es decir, la frecuencia de muestreo f_s debe de ser

$$f_s \geq 2f_m. \quad (5.1)$$

- A la frecuencia $2f_m$ se le conoce como frecuencia de muestreo de Nyquist.

Demostración

Según el enunciado se tiene que $S(w) = 0$ cuando $|w| > w_m$ (está limitada en banda), donde $w_m = 2\pi f_m$ sería la máxima componente de frecuencia angular de $s(t)$. Gráficamente:



El proceso de muestreo se modeliza matemáticamente mediante la multiplicación de $s(t)$ con un tren de impulsos unitarios $\delta_{T_s}(t)$ de periodo T_s .
Sea

$$s_s(t) = s(t)\delta_{T_s}(t)$$

la señal resultante de dicho producto, donde (véase la Ec. 4.15)

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

y

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

es el periodo de muestreo, siendo

$$\omega_s = 2\pi f_s.$$

Como ha hemos demostrado (Ec. 4.16),

$$\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)] = \Delta_{T_s}(w) = w_s \delta_{w_s}(w).$$

Teniendo en cuenta que la multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus espectros (Ec. 4.21), se tiene que

$$S_s(w) = \frac{1}{2\pi} (S(w) * w_s \delta_{w_s}(w)).$$

Al substituir $w_s = \frac{2\pi}{T_s}$, obtenemos que

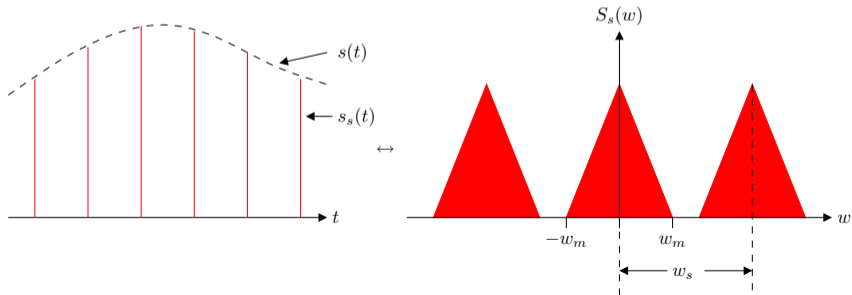
$$S_s(w) = \frac{1}{T_s} (S(w) * \delta_{w_s}(w))$$

que por definición de $\delta_{w_s}(w)$ (véase de nuevo la Ec.4.16) es

$$= \frac{1}{T_s} (S(w) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s))$$

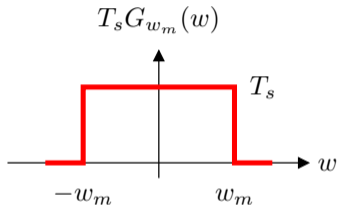
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(w) * \delta(w - nw_s) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(w - nw_s).
 \end{aligned}$$

Por tanto, el espectro de una señal muestreada es igual a la replicación cada w_s radianes/segundo del espectro de la señal original. Gráficamente:



5.3 El teorema del muestreo uniforme

Como se puede deducir de la representación gráfica de $S_s(w)$, podemos recuperar $s(t)$ a partir de $s_s(t)$ si filtramos las componentes de frecuencia superiores a w_m . Esto puede hacerse si multiplicamos $S_s(w)$ (en el dominio de la frecuencia, claro) por una función pulso rectangular



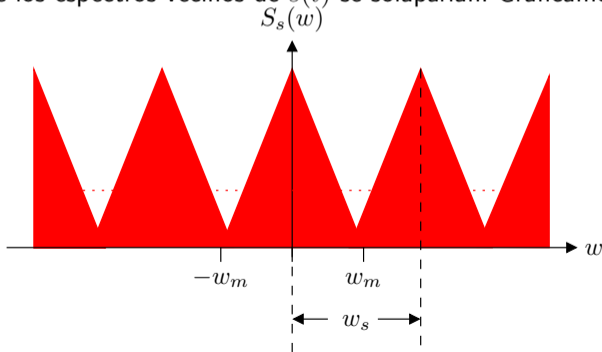
Esta función es en realidad la función de transferencia¹ de un filtro paso bajo con frecuencia de corte w_m y ganancia T_s .

¹Por definición, la función de transferencia de un filtro es su respuesta (en el dominio de la frecuencia) a la función impulso unitario.

El teorema del muestreo uniforme indica que para que la señal $s(t)$ sea recuperable a partir de la señal $s_s(t)$ debe cumplirse que

$$w_s \geq 2w_m.$$

La demostración de esto en virtud de los resultados obtenidos es muy sencilla. En el caso de que $w_s < 2w_m$ entonces sería imposible aislar el espectro de $s_s(t)$ mediante el filtro paso bajo y por tanto, no podríamos reconstruir $s(t)$ porque los espectros vecinos de $s(t)$ se solaparían. Gráficamente:



En esta situación sería imposible aislar el espectro de $s(t)$ a partir de $s_s(t)$ mediante la aplicación de un filtro paso bajo de frecuencia de corte w_s .

5.4. Ninguna señal finita está limitada en banda

- Las señales finitas son aquellas que sólo están definidas durante un intervalo de tiempo finito. Fuera del mismo se considera que valen cero.
- Según la teoría matemática de Fourier, es posible encontrar una representación para una señal finita que utiliza un número infinito de coeficientes de frecuencia (véase (3.1) o (3.9)).
- Como los coeficientes de Fourier se especifican en frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental w_0 (el espectro es discreto) [20] y existen infinitos coeficientes, se ocupa un ancho de banda infinito.

- Este hecho también puede determinarse si nos fijamos en el proceso que sería necesario si queremos obtener una señal finita a partir de una infinita $s(t)$ (que podría estar limitada en banda o no):
 1. Multiplicar la señal $s(t)$ infinita y limitada en banda por una función rectangular $g_\tau(t)$, en el dominio del tiempo.

Como sabemos, multiplicar dos señales en el dominio del tiempo equivale a convolucionar sus espectros. Como el espectro de una función cuadrada no es igual a una función impulso unitario (excepto en el caso de que $\tau = \infty$), el espectro de la función que realmente estamos muestreando no es igual al espectro de $s(t)$ y por supuesto, no está limitado en banda puesto que $G_\tau(w)$ no lo está (véase la Sección 3.9).

- Esto último provoca que sea imposible muestrear una señal durante un periodo finito de tiempo y luego reconstruirla (en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$) sin pérdida de información, excepto en el caso de que sea periódica y de periodo τ .

5.5. El muestreo de señales finitas

- Para eliminar el efecto de la deformación del espectro de una señal a causa de limitar su muestreo a un intervalo de tiempo finito, lo ideal sería utilizar una *función ventana* cuyo espectro fuera una función impulso unitario [31]. Para conseguir esto (por desgracia en la práctica sólo parcialmente) podemos hacer 2 cosas:
 1. Aumentar el tamaño de la ventana tanto como se pueda.
 2. Utilizar ventanas cuyo espectro se parezca lo máximo posible a una función impulso unitario (máxima acumulación de energía espectral en un intervalo de frecuencias tan pequeño como sea posible). Así minizaremos lo que se conoce como el fenómeno de la *dispersión espectral* o *leakage*.

- Este hecho es importante de cara a representar los espectros y algunos investigadores ya han encontrado funciones ventana que tratan de hacer esto. Ejemplos de ventanas temporales son:

1. *Ventana rectangular*:

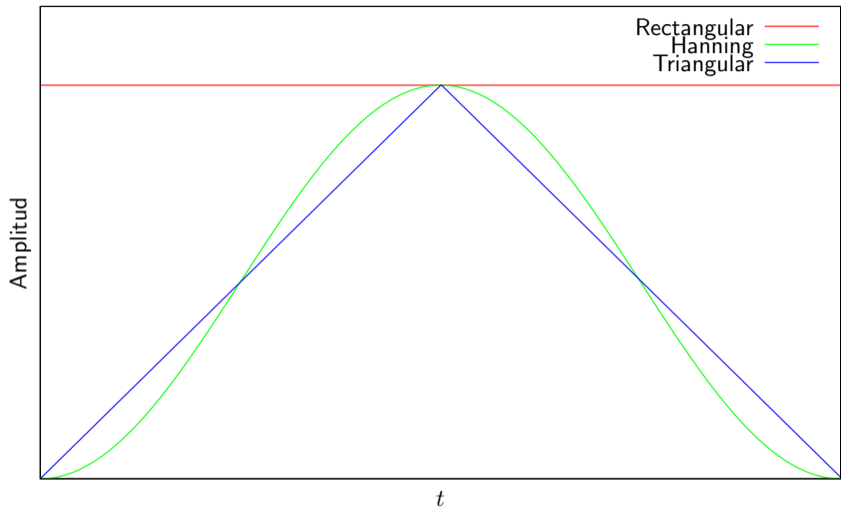
$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (5.2)$$

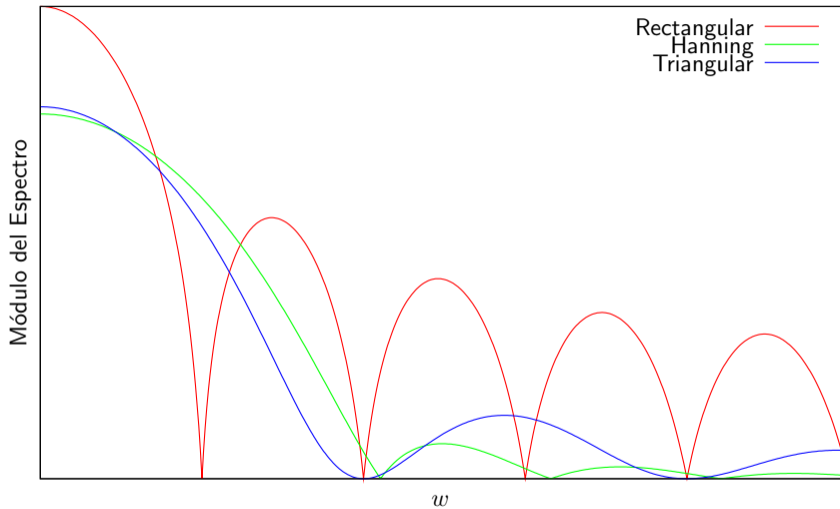
2. *Ventana de Hanning (von Hann)*:

$$\text{Hanning}_{\tau}(t) = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos(2\pi t) & \text{si } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (5.3)$$

3. *Ventana de Barlett (o triangular)*:

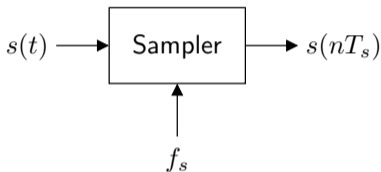
$$\text{Barlett}_{\tau}(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } -\frac{\tau}{2} < t \leq 0 \\ -2t & \text{si } 0 < t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (5.4)$$





5.6. Muestreo de audio

- Un sampler de audio es un dispositivo con una entrada analógica, por la que entra la señal analógica de audio $s(t)$ y una salida analógica, por donde sale la señal analógica $s_s(t) = s(nT_s)$; $n \in \mathcal{Z}$ [30].



El número de muestras/segundo que obtenemos depende de la frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$.

- Internamente, en general un sampler de audio tiene un filtro paso bajo para eliminar las frecuencias superiores a $f_s/2$ y evitar así el solapamiento espectral (*aliasing*).

5.7. Muestreo de imágenes

- Es una generalización del muestreo de audio al caso bidimensional (dimensiones X e Y). Por lo demás el proceso es el mismo. Un sampler para capturar imágenes muestrea a una determinada frecuencia (normalmente la misma) en ambas dimensiones y genera una matriz bidimensional para cada imagen.
- Notaremos a las muestras de una imagen como

$$s(xT_X, yT_Y); x \in \mathcal{Z}, y \in \mathcal{Z}$$

donde T_X es el periodo de muestreo en el dominio X y T_Y en el dominio Y .

5.8. Muestreo de vídeo

- Es una generalización del muestreo de imágenes, donde se captura una imagen cada determinado intervalo de tiempo.
- La frecuencia de muestreo temporal (número de imágenes/segundo) debería permitir la sensación de movimiento. En la práctica bastan aproximadamente 25 imágenes/segundo, aunque este valor puede aumentar si la cantidad de movimiento es muy alta.
- Notaremos a las muestras de vídeo como

$$s(xT_X, yT_Y, tT_T); x \in \mathcal{Z}, y \in \mathcal{Z}, t \in \mathcal{Z}$$

donde T_T es el periodo de muestreo temporal.

5.9. Algunos Casos Reales

- En un CD (Compact Disk) de audio, la frecuencia de muestreo es de 44.100 muestras/segundo. Esto significa que la máxima componente de frecuencia representada es igual a 22.050 Hz.
- En un SuperAudio CD, la frecuencia de muestreo es igual a 2,8224 MHz.
- En el sistema Dolby Digital las frecuencias de muestreo son de 32 kHz, 44,1 kHz y 48 kHz [14].
- En el sistema DTS (Digital Theater System) las frecuencias de muestreo son 32 kHz, 44,1 kHz, 48 kHz y 192 kHz [14].
- En el sistema PAL (Phase Alternating Line) el número de imágenes por segundo es igual a 25. En el sistema NTSC (National Television System Committee) 30. Nótese sin embargo que ambos representan las líneas de cada imagen de forma analógica (625 líneas en PAL y 512 en NTSC).

- En MPEG-1 (Motion Picture Experts Group) [24] (Video CD), la resolución del vídeo tiene que ser inferior a 768×576 puntos.
- En MPEG-2 [25] (DVD o Digital Versatile/Video Disk) la resolución tiene que ser inferior a 1920×1080 puntos. Los DVD's PAL almacenan típicamente imágenes de 720×576 puntos (PAL DVDs) y los NTSC 720×480 puntos [17].

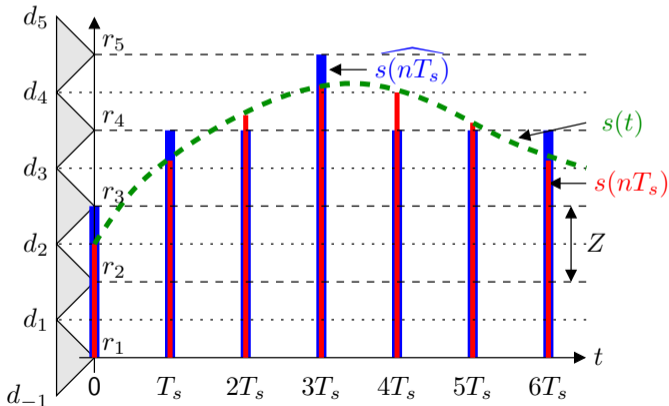
Capítulo 6

Cuantificación de señales

6.1. Teoría de la cuantificación

- En el proceso de digitalización de una señal, tras la fase de muestreo se procede a cuantificar (esto es, discretizar en amplitud) las muestras.
- La cuantificación es un **proceso imprescindible** en el proceso de digitalización porque, aunque el número de muestras es finito (para una señal de duración finita), el valor de cada muestra sigue siendo un valor analógico y se necesitaría una cantidad de memoria infinita para representar exactamente cada una de las muestras [33].
- Desgraciadamente, la cuantificación es un **proceso irreversible** porque, en general, produce una pérdida definitiva de información de la señal digitalizada.

- Sea $s(t)$ la señal que se desea digitalizar y sea $s(nT_s)$ la señal muestreada, donde recordemos, T_s define los instantes de muestreo. La fase de cuantificación representa las muestras $s(nT_s)$ mediante valores analógicos aproximados $\widehat{s[n]} = \widehat{s(nT_s)}$ de forma que se minimice el error de cuantificación. Gráficamente:

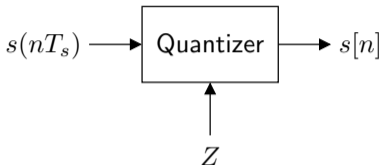


6.1 Teoría de la cuantificación

- A los $d_i; i \in \mathcal{Z}$ se les llama **niveles de decisión** y a los $r_i; i \in \mathcal{Z}$ se les llama **niveles de representación**. Z es el **paso de cuantificación** y define la resolución (precisión) del proceso de cuantificación. De su tamaño depende el error de cuantificación total.
- Como es lógico, cuantos más niveles de representación existan, menos pérdida de información se produce. Sin embargo, también aumenta el número de bits necesarios para representar cada nivel de representación. El objetivo del cuantificador es minimizar el error de cuantificación total QE (Quantization Error) definido como

$$QE = \sum_n |s(\widehat{nT_s}) - s(nT_s)| = \sum_n |s[n] - s(nT_s)|. \quad (6.1)$$

- Resumiendo, un *quantizer* es un dispositivo que discretiza los valores analógicos de una señal (véase la Sección 5.6):



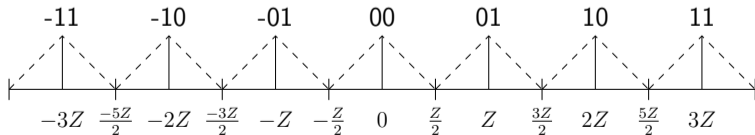
- Nótese que el proceso de cuantificación es irreversible porque conociendo los $s[n]$ y Z , no es posible reconstruir $s(nT_s)$ de forma exacta. Cuando Z es pequeño el error de cuantificación se minimiza pero aumenta el número de niveles de representación y por tanto, el número de bits/muestra necesarios para representar los $s[n]$.

6.2. Cuantificación lineal

- Es (con diferencia) el tipo de cuantificación más usada debido a su sencillez.
- Se basa en decidir un número concreto de niveles de decisión d_i que van a ser equidistantes y colocar los niveles de representación r_i en los puntos intermedios, para minimizar el error de cuantificación máximo.
- En un cuantificador lineal se verifica que:

$$Z = d_{i+1} - d_i = r_{i+1} - r_i.$$

Ejemplo:



6.2.1. SNR del cuantificador lineal

- La relación señal/ruido o SNR (Signal to Noise Ratio) mide la proporción relativa que existe entre la energía de la señal y una señal de ruido.
- En el contexto de la cuantificación, la señal original es $s(nT_s)$ y la señal con ruido es $s[n] - s(nT_s)$. Por tanto, se define

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{n=1}^N s(nT_s)^2}{\sum_{n=1}^N (s[n] - s(nT_s))^2}, \quad (6.2)$$

donde N es el número de muestras tomadas.

- Estadísticamente hablando, el error de cuantificación promedio en un cuantificador lineal depende del paso de cuantificación y es (el error de cuantificación promedio) igual a $Z/4$. Por tanto,

$$\overline{\text{SNR}} = \frac{\sum_{n=1}^N s(nT_s)^2}{\sum_{n=1}^N (Z/4)^2} = \frac{\sum_{n=1}^N s(nT_s)^2}{N \frac{Z^2}{16}}. \quad (6.3)$$

- Como se puede apreciar de esta expresión, la relación señal/ruido promedio es directamente proporcional a la inversa del paso de cuantificación elevado a cuadrado, es decir,

$$\overline{\text{SNR}} \sim \frac{1}{Z^2}. \quad (6.4)$$

- A su vez,

$$Z \sim \frac{1}{2^b}, \quad (6.5)$$

donde b es el número de bits utilizados para representar los niveles de representación. Es decir, a mayor número de bits, menor paso de cuantificación.

- Por tanto,

$$\overline{\text{SNR}} \sim (2^b)^2 = 2^{2b}. \quad (6.6)$$

- Finalmente, tomando Decibelios,

$$\overline{\text{SNR}}_{\text{dB}} \sim 10 \log_{10} 2^{2b} = 20b \log_{10} 2 \approx 6b \text{ dB}. \quad (6.7)$$

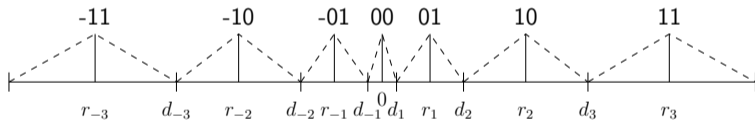
- Este resultado es interesante porque indica que con cada bit de precisión, mejoramos la calidad de la señal digitalizada en un factor de 6 dB. Si consideramos que para alcanzar una calidad HiFi (High Fidelity) en audio debemos conseguir 96 dB de relación señal/ruido, deberemos usar

$$\frac{96}{6} = 16 \text{ bits/muestra},$$

valor que coincide con la resolución usada en los CDs de audio.

6.3. Cuantificación logarítmica

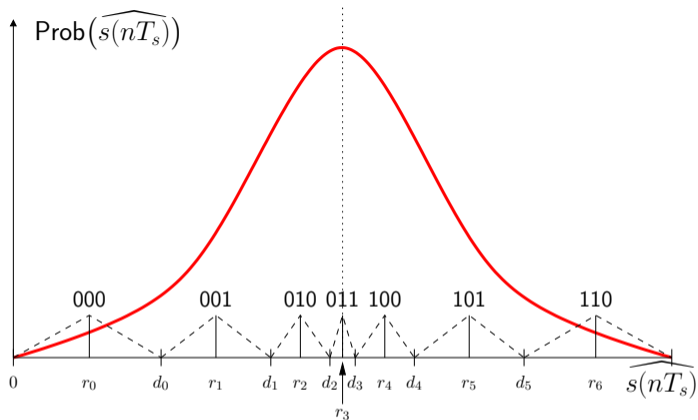
- Existen casos donde es más importante dedicar una mayor atención a un determinado rango de la señal a cuantificar. Por ejemplo, es conocido que el SAH es más sensible a las bajas intensidades de sonido. Por tanto, podemos diseñar un cuantificador teniendo en cuenta esta característica y obtendremos para una misma tasa de bits, una calidad subjetiva mayor.



- Subjetivamente hablando, se dice que un cuantificador logarítmico de 8 bits aporta aproximadamente la misma calidad que un cuantificador lineal de 16 bits. Por esto, la cuantificación logarítmica se utiliza intensivamente en telefonía.

6.4. Cuantificación de Max-LLoyd

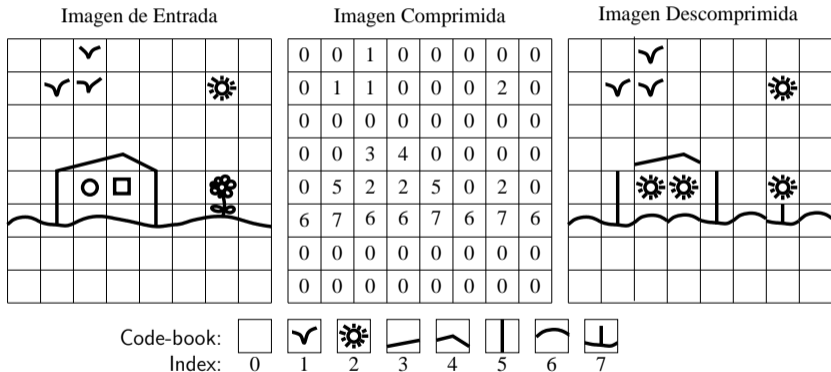
- Un cuantificador de Max-LLoyd se basa en la distribución estadística de los valores de las muestras, cuantificando con mayor precisión aquellas que son más frecuentes. De esta forma se minimiza el error de cuantificación.
- Por ejemplo, si las muestras siguen una distribución de Laplace (curva en rojo), el cuantificador de Max-LLoyd asociado sería el siguiente.



6.5. Cuantificación vectorial

- Todos los cuantificadores anteriormente presentados cuantifican cada muestra de forma independiente a las demás. Por este motivo se dice que son *cuantificadores escalares* o cuantificadores de orden 0.
- Cuando existe correlación entre las muestras, es más eficiente codificar parejas, ternas, ... en general n -tuplas de muestras conjuntas (vecinas) (en definitiva, un vector) mediante un único nivel de representación. Cuando esto ocurre se dice que la *cuantificación es vectorial* o que el cuantificador es de orden n .

- VQ (Vector Quantization) es muy usada para comprimir señales. A continuación se muestra un ejemplo (muy simple) de compresión de una imagen:



6.6. Algunos Casos Reales

- En un CD se utilizan 16 bits/muestra, dos canales de muestras, a razón de 44.100 muestras/segundo.
- El resto de formatos de audio comprimidos, tales como MP3, Dolby Digital y DTS, no poseen un número de bits/muestra en concreto porque dicho valor depende de la tasa de compresión (que puede ser variable). Sin embargo, inicialmente las muestras antes de ser comprimidas se representan típicamente con 16, 24 o 32 bits/muestra, y casi siempre se utiliza un cuantificador lineal.
 - En MPEG-1 audio se utilizan originalmente 16 bits/muestra.
 - En Dolby Digital se utilizan 32 bits/muestra, en cada uno de los 6 canales (5.1).
 - En DTS, 24 bits/muestra.
- En MPEG-1 vídeo (como en casi todos los demás formatos de vídeo digitales comprimidos) se utilizan originalmente 8 bits/componente de color.

Parte III

Codificación de señales audio-visuales

Capítulo 7

Compresión estadística

7.1. La compresión estadística

- Tras el proceso de digitalización de una señal se obtiene una secuencia de muestras $s[n]$ que representan dicha señal con más o menos fidelidad.
- En muchas ocasiones (especialmente cuando las señales se almacenan o transmiten) la cantidad de memoria (medida en bits) que se necesita para representar a $s[n]$ puede ser prohibitiva. Por ejemplo, una línea ADSL de 1000 kbps no es suficiente para transmitir una señal de audio estéreo con calidad CD.
- El principal objetivo de un compresor estadístico es eliminar la posible **redundancia estadística** que pudiera existir en $s[n]$ de forma que se minimice el número de bits necesarios sin que se pierda información. **La compresión estadística es un proceso reversible.**

7.2. La redundancia estadística

- En la representación digital de una señal $s[n]$ existen diferentes **fuentes de redundancia** (estadística, temporal y psico-acústica). En este apartado estudiaremos sólo la que se refiere a la redundancia estadística.
- Una secuencia se dice estadísticamente redundante cuando podemos encontrar una representación más compacta y para ello utilizamos un modelo estadístico de la fuente (señal). En este capítulo, describiremos diferentes modelos estadísticos y cómo pueden utilizarse para comprimir las secuencias.
- Aunque nuestro objetivo principal es comprimir secuencias de audio y de vídeo, es importante tener en cuenta que dichos modelos pueden ser aplicados a otros tipos de fuentes de información, como por ejemplo este documento. Por esta razón, a los codificadores estadísticos también se les llama **compresores de texto**, donde texto puede ser cualquier cosa que se representa digitalmente.

7.3. Símbolos, series y cadenas

- En el contexto de la compresión estadística a las muestras les llamaremos símbolos.
- Dependiendo del tipo de correlación entre símbolos explotada, hablaremos de series (runs) de símbolos cuando todos los símbolos sean iguales y de cadenas (strings) de símbolos cuando estos tienden a aparecer en patrones que se repiten.
- Estudiaremos distintos algoritmos que procesan las secuencias por símbolos, por series y por cadenas.

7.4. Compresión de series

- La compresión se produce porque reemplazamos series (repeticiones de símbolos todos iguales) por códigos de compresión (code-words) de longitud menor.

7.4.1. RLE (Run Length Encoding)

Compresor

1. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) Sea s el siguiente símbolo.
 - b) Leer los siguientes n símbolos consecutivos iguales a s .
 - c) Emitir un par ns .

Descompresor

1. Mientras existan pares ns que descodificar:
 - a) Escribir n símbolos iguales a s .

Ejemplo

Las series:

aaaabbbbbaaaaaabbbbbbbcccccc

se codificarían como:

4a 5b 6a 7b 6c

7.4.2. RLE binario

- Cuando sólo existen 2 símbolos diferentes no es necesario indicar el símbolo porque cuando una serie acaba es porque comienza otra con el símbolo alternativo.

Compresor

1. Sea $s \leftarrow 0$.
2. Mientras existan bits por codificar:
 - a) Leer los siguientes n bits consecutivos iguales a s .
 - b) Escribir n .
 - c) $s \leftarrow (s + 1)$ módulo 2.

Descompresor

1. Sea $s \leftarrow 0$.
2. Mientras existan items n que descodificar:
 - a) Escribir n bits iguales a s .
 - b) $s \leftarrow (s + 1)$ módulo 2.

Ejemplo

Las series:

000011111000000111111000000

se codificarían como:

4 5 6 7 6

7.4.3. RLE MNP-5

- El principal problema de RLE radica fundamentalmente en que cuando las series son pequeñas, el proceso de codificación se convierte en una expansión.
- Tratando de solucionar este problema, Microcom Inc. ideó un algoritmo que llamó Microcom Networking Protocol 5 [22] que se basa en la idea de codificar sólo aquellas series de longitud superior a 2. A continuación se muestran algunos casos:

Entrada	Salida	Comentario
ab	ab	Sin codificación
aab	aab	Sin codificación
aaab	aaa0b	Expansión
aaaab	aaa1b	Ni compresión, ni expansión
aaaaab	aaa2b	Compresión
$a^n b$	$aaan - 3b$	Caso general

donde $a^n b$ es una cadena de n a consecutivas y n es un código binario

de longitud fija que indica el valor n .

Ejemplo

Las series:

aaaabbbbbaaaaaabbbbbbbcccccc

se codificarían como:

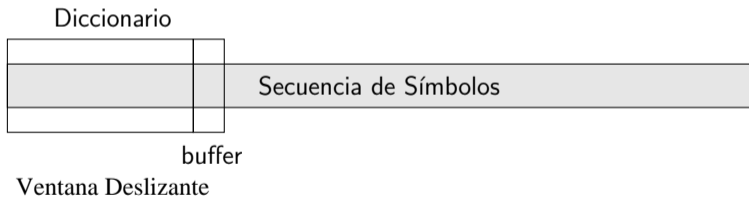
aaa1 bbb2 aaa3 bbb4 ccc3

7.5. Compresión de cadenas

- La compresión se produce porque reemplazamos cadenas (patrones repetidos de símbolos) por códigos de compresión (code-words) de longitud menor.
- Los compresores basados en diccionarios son la clase de compresores de datos más utilizados debido a sus buenas tasas de compresión, bajo consumo de memoria y alta velocidad de ejecución (algunos ejemplos son *compress*, *gzip*, *WinZip* y *WinRar*).
- La idea en la que se basan es muy sencilla: utilizar un diccionario de cadenas para sustituirlas por una referencia al mismo de forma que el tamaño de esta referencia suele ocupar menos espacio que la cadena substituida.

7.5.1. LZ77

- En 1977, Jacov Ziv y Abraham Lempel inventaron uno de los algoritmos de compresión de datos más famosos, el LZ77 [39], padre de compresores como *gzip* o *WinZip*.
- LZ77 distingue 4 partes en una secuencia de símbolos: (1) la parte codificada, (2) el diccionario, (3) el buffer de anticipación y (4) la parte aún no codificada. Inicialmente tenemos que:



- El diccionario y el buffer de anticipación tienen una longitud fija y pueden ser considerados como una ventana deslizante, donde la in-

serción de un nuevo símbolo en el buffer provoca la salida del más antiguo, que pasa a ser el más nuevo del diccionario.

- Sea I el tamaño del diccionario y J el tamaño del buffer, ambos medidos en símbolos.

Compresor

1. Introducir los primeros J símbolos en el buffer.
2. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) Sea i la posición de los primeros j símbolos del buffer en el diccionario y k el símbolo que hace que j no pueda ser mas grande.
 - b) Escribir ijk .
 - c) Introducir los siguientes $j + 1$ símbolos en el buffer.

Descompresor

1. Mientras existan ternas ijk por leer:
 - a) Escribir los j símbolos extraídos a partir de la posición i del diccionario.
 - b) Escribir k .
 - c) Introducir todos los símbolos descodificados en el buffer.

Ejemplo de compresión

	Dicc	Buffer		Salida	Comentario
		abab	cbababaaaaaa	0 0 a	diccionario vacío
	a	babc	bababaaaaaa	0 0 b	b no encontrado
	ab	abcb	ababaaaaaa	2 2 c	ab encontrado
a	babc	baba	baaaaaa	0 3 a	bab encontrado
ababc	baba	baaa	aaa	0 2 a	ba encontrado
ababcbab	abaa	aaaa		2 3 a	aaa encontrado
	0123				

Ejemplo de descompresión

Entrada	Salida		Dicc	Buffer
0 0 a	a			a
0 0 b	b		a	b
2 2 c	abc		ab	abc
0 3 a	baba	a	babc	baba
0 2 a	baa	ababc	baba	baa
2 3 a	aaaa	ababcbabab	abaa	aaaa
			0123	

- Los parámetros I y J controlan el rendimiento del algoritmo LZ77 porque deben ser lo suficientemente grandes como para que las búsquedas tengan éxito, pero sin que aumenten excesivamente el tamaño de las ternas ijk . Tamaños típicos son $\log_2(I) = 12,0$ y $\log_2(J) = 4,0$.

7.5.2. LZ78

- En 1978, Ziv y Lempel publicaron un nuevo método de compresión de datos que ha tenido también mucho éxito, el LZ78 [40]. Lo realmente interesante de este algoritmo es la representación recursiva que utiliza el diccionario. Este está compuesto por pares wk donde w es una posición dentro del diccionario y k es un símbolo.
- wk representa a la cadena formada por la concatenación de la “cadena” w con el símbolo k . Es importante darse cuenta de que w es físicamente un número entero positivo, aunque representa a una cadena porque apunta a una dirección dentro del diccionario donde hay otra $w'k'$. Llamaremos a este proceso de concatenación “string(w)”, que finaliza cuando $w = 0$ (la cadena vacía).

Compresor

1. Sea $w \leftarrow 0$.
2. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) $k \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
 - b) Si wk existe en el diccionario, entonces:
 - 1) $w \leftarrow$ dirección de wk en el diccionario.
 - c) Si no:
 - 1) Escribir wk a la salida.
 - 2) Insertar wk en el diccionario.
 - 3) $w \leftarrow 0$.

Ejemplo de compresión y diccionario

Entrada	Salida	Comentario
a	0a	$D[1] \leftarrow a$
b	0b	$D[2] \leftarrow b$
a		$D[1] = a$
b	1b	$D[3] \leftarrow ab$
c	0c	$D[4] \leftarrow c$
b		$D[2] = b$
a	2a	$D[5] \leftarrow ba$
b		$D[2] = b$
a		$D[5] = ba$
b	5b	$D[6] \leftarrow bab$
a		$D[1] \leftarrow a$
a	1a	$D[7] \leftarrow aa$
a		$D[1] \leftarrow a$
a		$D[7] \leftarrow aa$
a	7a	$D[8] \leftarrow aaa$
a		$D[1] = a$
a		$D[7] = aa$
a		$D[8] = aaa$
a	8a	$D[9] \leftarrow aaaa$

1. Sea $w \leftarrow 0$.
2. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) $k \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
 - b) Si wk existe en el diccionario, entonces:
 - 1) $w \leftarrow$ dirección de wk en el diccionario.
 - c) Si no:
 - 1) Escribir wk a la salida.
 - 2) Insertar wk en el diccionario.
 - 3) $w \leftarrow 0$.

Dirección	w	k	Cadena
1	0	a	a
2	0	b	b
3	1	b	ab
4	0	c	c
5	2	a	ba
6	5	b	bab
7	1	a	aa
8	7	a	aaa
9	8	a	aaaa

Descompresor

1. Mientras existan códigos por descodificar:
 - a) Leer un código wk .
 - b) Escribir $\text{string}(w)$ a la salida.
 - c) Escribir k a la salida.
 - d) Insertar wk en el diccionario.

Ejemplo de descompresión y diccionario

Entrada	Salida	Comentario	Dirección	w	k	Cadena
0a	a	$D[1] \leftarrow a$	1	0	a	a
0b	b	$D[2] \leftarrow b$	2	0	b	b
1b	ab	$D[3] \leftarrow ab$	3	1	b	ab
0c	c	$D[4] \leftarrow c$	4	0	c	c
2a	ba	$D[5] \leftarrow ba$	5	2	a	ba
5b	bab	$D[6] \leftarrow bab$	6	5	b	bab
1a	aa	$D[7] \leftarrow aa$	7	1	a	aa
7a	aaa	$D[8] \leftarrow aaa$	8	7	a	aaa
8a	aaaa	$D[9] \leftarrow aaaa$	9	8	a	aaaa

1. Mientras existan códigos por descodificar:

- Leer un código wk .
- Escribir $\text{string}(w)$ a la salida.
- Escribir k a la salida.
- Insertar wk en el diccionario.

7.5.3. LZW

- En 1984, Terry A. Welch modificó el LZ78 para hacerlo un poco más eficiente [38], evitando escribir los símbolos k (sin codificar). LZW (Lempel Ziv Welch) se utiliza en el formato GIF (Graphics Interchange Format) [16] de compresión de imágenes y en el compresor *compress* de los sistemas UNIX [21].
- El diccionario usado por LZW es casi igual al de LZ78, excepto que inicialmente no está vacío porque al comienzo se guardan todos los posibles símbolos (también llamados en el contexto del LZW, raíces). De esta forma, el símbolo k puede formar ahora parte de la cadena $\text{string}(w)$.

Compresor

1. $w \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
2. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) $k \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
 - b) Si wk está en el diccionario, entonces:
 - 1) $w \leftarrow$ dirección de wk en el diccionario.
 - c) Si no:
 - 1) Escribir $\leftarrow w$ a la salida.
 - 2) Insertar wk en el diccionario.
 - 3) $w \leftarrow k$.

Ejemplo de compresión y diccionario

Entrada	w	k	Salida	Comentario
ab	97	b	97	$D[257] \leftarrow ab$
a	98	a	98	$D[258] \leftarrow ba$
b	97	b		$w = 257$
c	257	c	257	$D[259] \leftarrow abc$
b	99	b	99	$D[260] \leftarrow cb$
a	98	a		$w = 258$
b	258	b	258	$D[261] \leftarrow bab$
a	98	a		$w = 258$
b	258	b		$w = 261$
a	261	a	261	$D[262] \leftarrow baba$
a	97	a	97	$D[263] \leftarrow aa$
a	97	a		$w = 263$
a	263	a	263	$D[264] \leftarrow aaa$
a	97	a		$w = 263$

1. $w \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
2. Mientras existan símbolos por codificar:
 - a) $k \leftarrow$ siguiente símbolo de entrada.
 - b) Si wk está en el diccionario, entonces:
 - 1) $w \leftarrow$ dirección de wk en el diccionario.
 - c) Si no:
 - 1) Escribir $\leftarrow w$ a la salida.
 - 2) Insertar wk en el diccionario.
 - 3) $w \leftarrow k$.

Dirección	Cadena	w	k
0		0	NULL
⋮		⋮	⋮
97		0	a
98		0	b
99		0	c
⋮		⋮	⋮
256	reservado	ESC	
257	ab	97	b
258	ba	98	a
259	abc	257	c
260	cb	99	b
261	bab	258	b
262	baba	261	a
263	aa	97	a
264	aaa	263	a

- La entrada 256 del diccionario (y el código de compresión 256) se utilizan para que el compresor le indique al descompresor distintas acciones. Esto se hace enviando el código 256 y a continuación un número que indique, por ejemplo:
 1. Incrementar el número de bits utilizados para codificar w , en función del tamaño del diccionario.
 2. Vaciar el diccionario porque está polucionado con cadenas que ahora no se están encontrado en la secuencia de símbolos de entrada.
 3. El final de la descodificación.

Descompresor

1. $code \leftarrow$ primer código de entrada.
2. Escribir $code$ a la salida.
3. $old_code \leftarrow code$.
4. Mientras existan códigos de entrada:
 - a) $code \leftarrow$ siguiente código de entrada.
 - b) $w \leftarrow old_code$.
 - c) Si $code$ está en el diccionario, entonces:
 - 1) Escribir $string(code)$ a la salida.
 - d) Si no:
 - 1) Escribir $string(w)$ a la salida.
 - 2) Escribir k a la salida.
 - e) $k \leftarrow$ primer símbolo emitido en la salida anterior.
 - f) Insertar wk en el diccionario.
 - g) $old_code \leftarrow code$.

Ejemplo de descompresión

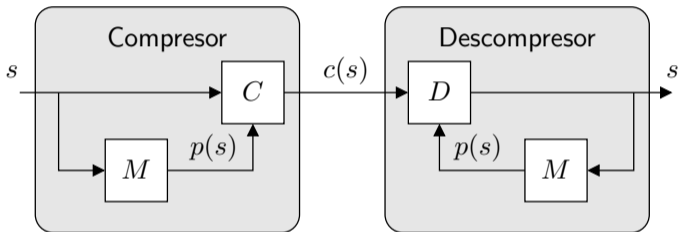
Entrada	<i>code</i>	<i>w</i>	<i>k</i>	Salida	Comentario
97	97			a	Iniciación
98	98	97	b	b	$code < 257, D[257] \leftarrow ab$
257	257	98	a	ab	$code < 258, D[258] \leftarrow ba$
99	99	257	c	c	$code < 259, D[259] \leftarrow abc$
258	258	99	b	ba	$code < 260, D[260] \leftarrow cb$
261	261	258	b	bab	$code = 261, D[261] \leftarrow bab$
97	97	261	a	a	$code < 262, D[262] \leftarrow baba$
263	263	97	a	aa	$code = 263, D[263] \leftarrow aa$

1. $code \leftarrow$ primer código de entrada.
2. Escribir $code$ a la salida.
3. $old_code \leftarrow code$.
4. Mientras existan códigos de entrada:
 - a) $code \leftarrow$ siguiente código de entrada.
 - b) $w \leftarrow old_code$.
 - c) Si $code$ está en el diccionario, entonces:
 - 1) Escribir $string(code)$ a la salida.
 - d) Si no:
 - 1) Escribir $string(w)$ a la salida.
 - 2) Escribir k a la salida.
 - e) $k \leftarrow$ primer símbolo emitido en la salida anterior.
 - f) Insertar wk en el diccionario.
 - g) $old_code \leftarrow code$.

7.6. Compresión de símbolos

- La compresión se produce porque reemplazamos símbolos de longitud fija por códigos de compresión (code-words) de longitud menor (en general variable).
- Los compresores de símbolos (o compresores entrópicos) son muy utilizados en otros compresores más especializados como JPEG o MPEG.
- Conceptualmente, la compresión de símbolos se basa en que el compresor y el descompresor realizan las mismas predicciones probabilísticas sobre los símbolos que se están transmitiendo. Asociando códigos de longitud más corta a aquellos símbolos con mayor probabilidad de ocurrencia, podemos comprimir.

- Si C denota al codificador entrópico, D al decodificador entrópico, M al modelo probabilístico, s al símbolo a codificar, $p(s)$ a su probabilidad y $c(s)$ a su codificación comprimida, un codec entrópico posee la siguiente estructura:



Los códigos de compresión $\{c(s)\}$ ocupan en general menos memoria que los símbolos originales.

- La información generada por el modelo probabilístico no se transmite desde el compresor al descompresor.

7.6.1. Bit de dato y bit de información

- Aunque se trata de conceptos profundamente relacionados, existe una sutil diferencia entre dato e información:

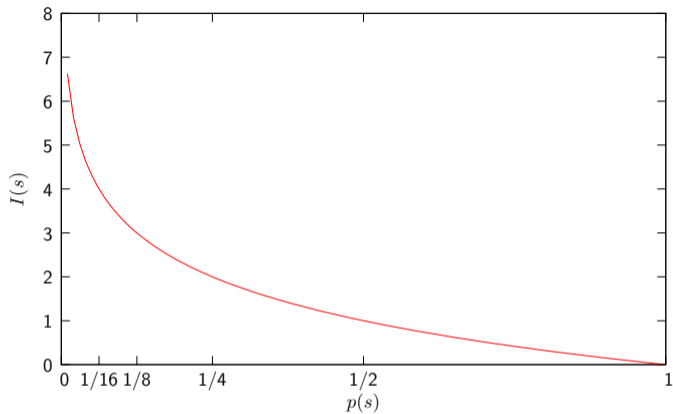
Los datos son la representación de la información.

- Una consecuencia directa de este hecho es que la misma información puede ser representada de muchas formas, unas más compactas que otras. Esto explica la existencia de los compresores de datos.
- Por definición, un bit de de datos transporta un bit de información si y sólo si representa la ocurrencia de un evento equiprobable, es decir, si la probabilidad de que dicho evento sea verdadero es igual a la de que sea falso. En cualquier otro caso, el bit de datos representará una cantidad diferente de bits de información. Por definición, esta cantidad para el s -ésimo símbolo del alfabeto es

$$I(s) = -\log_2 p(s) \quad (7.1)$$

bits de información, donde $p(s)$ es la probabilidad de ocurrencia del símbolo s .

- Nótese que si la probabilidad de un símbolo es muy baja, entonces el número de bits de información representados es muy alto y viceversa. Gráficamente el número de bits de información asociados a un símbolo en función de su probabilidad es:



7.6.2. Entropía de una fuente de información

- La entropía es una medida de la cantidad de bits de información que una fuente de información proporciona en promedio, con cada símbolo generado. Por definición, la entropía $H(S)$ de una fuente S se calcula como

$$H(S) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N p(s) \times I(s) \quad (7.2)$$

donde N es el tamaño del alfabeto fuente (número de símbolos diferentes).

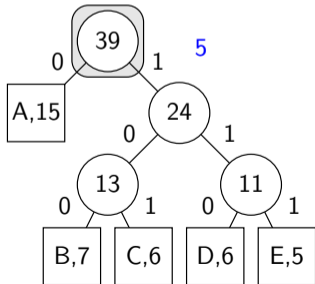
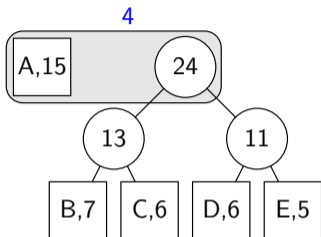
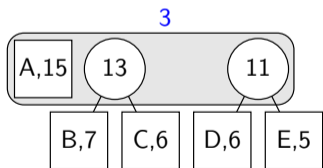
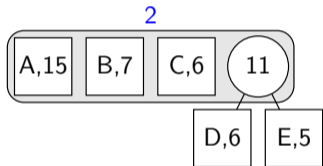
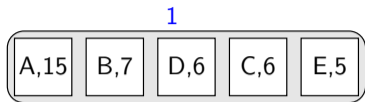
- La entropía se mide en bits de información por símbolo.
- La finalidad de la compresión estadística es la de encontrar una codificación tal que el número de bits de datos en promedio coincida con la entropía de la fuente.

7.6.3. La codificación de Huffman

- Sistema de codificación entrópica.
- Ideado por David A. Huffman en 1952 [23], es una de las codificaciones más utilizadas actualmente debido a su sencillez, buen rendimiento y facilidad de uso.
- Se basa en la idea de utilizar códigos de longitud variable de forma que aquellos símbolos más frecuentes se representan mediante los códigos más cortos y viceversa.
- El codificador crea los códigos mediante un árbol binario en el cual los símbolos están en las hojas y las ramas son etiquetadas usando los dígitos binarios 0 y 1. La distancia de un símbolo a la raíz del árbol define la longitud del código de Huffman asignado a dicho símbolo, y esto depende en última instancia de la probabilidad del símbolo. En concreto, el código asignado a un símbolo es aquel número binario que resulta de viajar desde la raíz hasta dicho símbolo.

- Huffman ideó la manera de diseñar el árbol. Este es el algoritmo:
 1. Crear una lista de árboles binarios, en la que cada árbol está formado por un único nodo y cada nodo contiene un símbolo y su probabilidad.
 2. Mientras existan al menos 2 árboles en la lista:
 - a) Extraer de la lista los 2 árboles con menor probabilidad.
 - b) Insertar en la lista un nuevo árbol binario cuyas hojas son los árboles extraídos y cuya raíz es la suma de las probabilidades de estos.

Ejemplo



- Nótese que para diseñar el árbol de Huffman es necesario conocer la probabilidad de ocurrencia de todos los posibles símbolos de la secuencia. Es el modelo estadístico de la fuente el elemento que proporciona dicha información.
- La descodificación se realiza conociendo el árbol de Huffman o lo que es lo mismo, el modelo estadístico utilizado por el codificador.

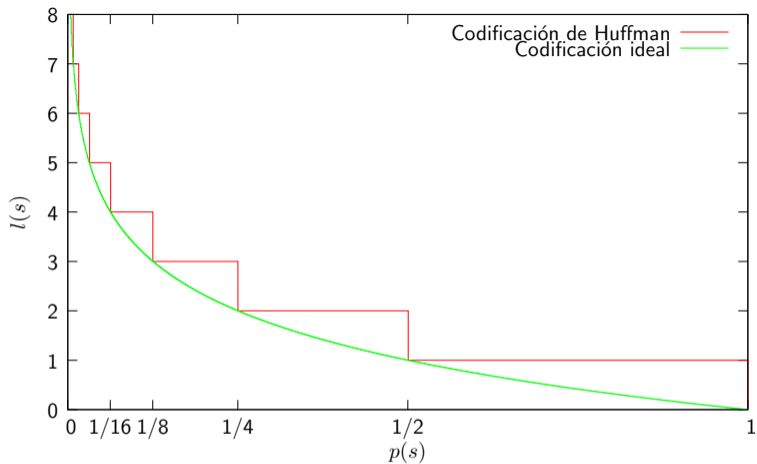
7.6.4. Limitaciones del código de Huffman

- Por desgracia, la codificación de Huffman asigna a cada símbolo un número entero de bits y por definición, el número de bits de información no tiene por qué serlo. En otras palabras, en la codificación de Huffman se cumple que

$$l(c(s)) = \lceil I(s) \rceil, \quad (7.3)$$

donde $l(c(s))$ es la longitud del código de compresión asignado al símbolo s .

- Esto provoca que con cada codificación de un símbolo, hasta casi un bit de datos de redundancia podría ser introducido. Así, para una secuencia completa el número de bits de redundancia puede ser importante.
- Este problema se agudiza cuando el número de símbolos es sólo 2. En este caso, la codificación de Huffman no cambia la representación original binaria (0 y 1), y la cantidad de redundancia introducida para codificar el símbolo más frecuente es importante. Gráficamente:



7.6.5. La codificación aritmética

- Un código aritmético solventa el problema del código de Huffman asignando a cada símbolo un número de bits de datos igual al número de bits de información que transporta, cumpliéndose que

$$l(c(s)) = I(s). \quad (7.4)$$

- En este sentido, la longitud media de un código aritmético coincide con la entropía de la fuente, medida en bits de datos por símbolo. Por tanto, se trata de un sistema de codificación óptimo.

Compresor

1. Sea $[L, H) \leftarrow [0,0, 1,0)$ el intervalo inicial.
2. Mientras existan símbolos de entrada:
 - a) Dividir el intervalo $[L, H)$ en tantos sub-intervalos como símbolos diferentes existen en el alfabeto. El tamaño de cada sub-intervalo es proporcional a la probabilidad del símbolo asociado.
 - b) Seleccionar de entre todos los sub-intervalos, el que corresponde al símbolo codificado en la iteración actual. Sea el intervalo elegido $[L', H')$.
 - c) Hacer $[L, H) \leftarrow [L', H')$.
3. Emitir un número $x \in [L, H)$ como código aritmético. El número de cifras deberá permitir distinguir el intervalo final $[L, H)$ de cualquier otro.

Ejemplo

Imaginemos que en una secuencia binaria (con alfabeto $\{A, B\}$) tenemos que $p(A) = 3/4$ y $p(B) = 1/4$. Calcúlese el código aritmético asociado a las secuencias A, B, AA, AB, BA y BB.

0,00	A	AA	0000	000	00	0
			0001			
			0010	001		
			0011			
0,25			0100	010	01	
			0101			
			0110	011		
			0111			
0,50		1000	100	10		
		1001				
	AB	1010	101			
		1011				
0,75	B	BA	1100	110	11	
						1101
		BB	1110	111		
						1111
1,00						

$c(A) = 0$
 $c(B) = 11$
 $c(AA) = 0$
 $c(AB) = 101$
 $c(BA) = 110$
 $c(BB) = 1111$

Transmisión incremental

- En la práctica el codificador envía los bits del código aritmético en el instante en que estos son conocidos.

Por ejemplo, cuando se codifica la B , inmediatamente se transmite un 1 porque cualquier secuencia de símbolos que comienza por B se codifica inicialmente con un 1. A continuación se expande el intervalo $[0,50, 1,00)$ (porque se ha transmitido un 1) al intervalo $[0, 1)$ y el proceso se repite con el siguiente símbolo de entrada.

Esto se hace para no perder precisión numérica a la hora de representar (usando un número finito de bits) los límites del intervalo.

- Nótese que la transmisión de aquellos bits más significativos de L y H en cuanto son conocidos implican el desplazamiento a la izquierda del resto de bits y la inclusión de bits iguales a 0 por la derecha. El resultado de dicho desplazamiento es una ampliación automática del intervalo seleccionado.

Descompresor

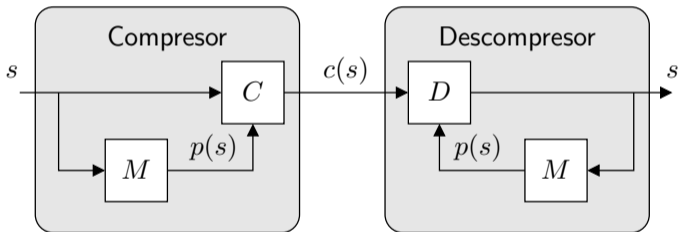
1. Sea $[L, H) \leftarrow [0,0, 1,0)$ el intervalo inicial.
2. Mientras existan símbolos que descodificar:
 - a) Dividir el intervalo $[L, H)$ en tantos sub-intervalos como símbolos diferentes existen en el alfabeto. El tamaño de cada sub-intervalo es proporcional a la probabilidad del símbolo asociado.
 - b) Leer tantos bits del código aritmético x de entrada como sean necesarios para:
 - 1) Seleccionar $[L', H')$ al que el código aritmético x pertenece.
 - 2) Emitir el símbolo asociado a $[L', H')$.
 - 3) Hacer $[L, H) \leftarrow [L', H')$.

Ejemplo

(Ver el **ejemplo del compresor**, pero desde el punto de vista del descompresor). El proceso consiste básicamente en leer tantos bits de entrada como sean necesarios para determinar un símbolo, y repetir este proceso hasta que no haya más bits de código aritmético.

7.6.6. Modelos probabilísticos

- Se utilizan para calcular las probabilidades de los símbolos durante su compresión mediante codificadores de longitud variable.
- El compresor y el descompresor utilizan el mismo modelo y por tanto pueden reconstruir las representaciones originales de las secuencias.



7.6.6.1. Modelos estáticos

- Son los modelos probabilísticos más sencillos que existen porque asignan una probabilidad constante (a lo largo del tiempo) a los símbolos de la fuente.
- El uso de un modelo estático permite además precalcular los códigos de longitud variable, lo que simplifica el proceso de codificación.
- A pesar de su simpleza son muy utilizados porque normalmente se conoce de antemano la probabilidad de los símbolos (ejemplos: JPEG, MPEG, MP3, etc.).

7.6.6.2. Modelos adaptativos

- Cuando las probabilidades de los símbolos no son conocidas a priori, los modelos probabilísticos adaptativos pueden calcular sus probabilidades en “tiempo de ejecución”.
- En general, las tasas de compresión conseguidas utilizando modelos adaptativos son superiores a las de los modelos estáticos.

Compresor

1. Asignar la misma probabilidad a todos los símbolos.
2. Mientras existan símbolos que codificar:
 - a) Codificar el siguiente símbolo.
 - b) Actualizar (incrementando) su probabilidad.

Descompresor

1. Idéntico al paso 1. del compresor.
2. Mientras existan símbolos que descodificar:
 - a) Descodificar el siguiente símbolo.
 - b) Idéntico al paso 2.b) del compresor.

7.6.6.3. Modelos inicialmente vacíos

- Una mejora que podemos hacer es contemplar la posibilidad de que transcurra bastante tiempo hasta que un símbolo es utilizado por primera vez. Cuando esto es así, el repartir inicialmente el espacio de probabilidades entre unos pocos símbolos en lugar de todos los posibles puede ayudar a incrementar las probabilidades de los símbolos que realmente están ocurriendo y reducir así la tasa de bits.
- Para hacer esto se incorpora al modelo un símbolo especial llamado ESC(ape) que nunca va a ser generado por la fuente, sino por el codificador. De esta forma, cuando el codificador encuentra un símbolo que nunca antes había aparecido, lo incorpora a su modelo y envía un símbolo ESC hasta el decodificador para indicarle que va a recibir un símbolo nuevo.

Compresor

1. Asignar a ESC la máxima probabilidad 1,0 y 0,0 al resto de símbolos.
2. Mientras existan símbolos que codificar:
 - a) $s \leftarrow$ siguiente símbolo.
 - b) Si s ya ha aparecido antes, entonces:
 - 1) Codificar s .
 - c) Si no:
 - 1) Codificar un ESC.
 - 2) Enviar s (sin codificar).
 - 3) Añadir s al modelo.
 - d) Actualizar $p(s)$.

Descompresor

1. Asignar a ESC la máxima probabilidad 1,0 y 0,0 al resto de símbolos.
2. Mientras existan símbolos que descodificar:
 - a) Descodificar s .
 - b) Si $s = \text{ESC}$, entonces:
 - 1) Recibir un nuevo s (que no está descodificado).
 - 2) Añadir s al modelo.
3. Actualizar $p(s)$.

7.6.6.4. Modelos con memoria

- En muchos casos la probabilidad de un símbolo depende de los símbolos vecinos (también llamados contexto). Cuando esto ocurre se dice que el modelo posee memoria (recuerda el contexto) [15].
- La ventaja de tener en cuenta el contexto es que las probabilidades pueden calcularse con mayor precisión (asignando probabilidades más altas) y por tanto se decrementa el número de bits necesarios para representar las secuencias comprimidas.

Compresor

Sea $C[i]$ la secuencia de los i últimos símbolos codificados y sea $p(s|C[i])$ la probabilidad de que ocurra el símbolo s tras $C[i]$. Sea k el orden de predicción (el número máximo de símbolos recordados).

1. Crear un modelo vacío (excepto por el símbolo ESC) para cada posible contexto donde $i \geq 0$ y un modelo no vacío para $i = -1$.
2. Mientras existan símbolos que codificar:
 - a) $s \leftarrow$ siguiente símbolo.
 - b) $i \leftarrow k$.
 - c) Mientras $p(s|C[i]) = 0$ (s es la primera vez que aparece tras $c[i]$):
 - 1) Codificar ESC según $p(\text{ESC}|C[i])$.
 - 2) Añadir s al contexto para $C[i]$.
 - 3) $i \leftarrow i - 1$.

- d) Codificar s según $p(s|C[i])$. Todos los símbolos que estaban en contextos de orden mayor que i deben ser excluidos del contexto actual ya que es seguro que s no es ninguno de ellos.
- e) Actualizar $p(s|C[i])$.

Ejemplo

- $r = 256$ es el tamaño del alfabeto fuente.
- El contexto $C[-1]$ tiene asociado un modelo probabilístico $M[C[-1]]$ de orden 0 no adaptativo y no vacío, en el que además aparece el símbolo especial EOF (End Of File). Por tanto, este modelo contiene $r + 1$ símbolos y su contenido es

$$M[C[-1]] = \{0, 1, 1, 1, \dots, a, 1, b, 1, \dots, 255, 1, \text{ESC}, 1, \text{EOF}, 1\},$$

donde cada par a, b denota el símbolo a y su probabilidad b , medida como un número de ocurrencias.

- El contexto $C[0]$ tiene asociado un modelo probabilístico de orden 0 adaptativo e inicialmente vacío, que contiene sólo el símbolo ESC. Su contenido es, por tanto

$$M[C[0]] = \{\text{ESC}, 1\}.$$

- En este ejemplo (por simplicidad), el orden máximo de predicción es $k = 1$ (se recuerda a lo sumo el símbolo anterior). Por tanto, existen otros r contextos de orden 0 adaptativos e inicialmente vacíos, iguales al anteriormente descrito y que contienen sólo el símbolo ESC.
- Durante la codificación del símbolo a ocurre lo siguiente:
 1. $s \leftarrow a$.
 2. $i \leftarrow 0$ (para el primer símbolo, no recordamos el anterior).
 3. $p(a|C[0]) = 0$ (el contexto contiene sólo el ESC).
 4. Codificamos un ESC aunque no se genera ningún bit de código porque su probabilidad es 1.
 5. Añadimos a al modelo $M[C[0]]$.
 6. Hacemos $i \leftarrow -1$.
 7. $p(a|C[-1]) \neq 0$.
 8. Codificamos a según $p(a|C[-1]) = 1/(r + 1)$.

- Durante la codificación del segundo símbolo (b):

7.6 Compresión de símbolos

1. $s \leftarrow b$.
2. $i \leftarrow 1$.
3. $p(b|C[1]) = 0$ porque $C[1] = a$ y $M[a]$ contiene inicialmente sólo el símbolo ESC.
4. Codificamos un ESC y no se genera ningún bit de código porque su probabilidad es 1.
5. Añadimos b al modelo $M(a)$.
6. Hacemos $i \leftarrow 0$.
7. $p(b|C[0]) = 0$ porque $M[C[0]]$ contiene sólo el símbolo ESC y el símbolo a .
8. Codificamos un ESC, pero ahora se generan $-\log_2(2/3)$ bits de datos. Se incrementa su recuento.
9. Añadimos b al modelo $M[C[0]]$. Ahora $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 3 a, 1 b, 1\}$.
10. Hacemos $i \leftarrow -1$.
11. $p(b|C[-1]) \neq 0$.

12. Codificamos b según $p(b|C[-1]) = 1/r$. Nótese que debe excluirse el símbolo a para calcular la probabilidad del símbolo b porque el símbolo a ya aparece en el contexto $M[C[0]]$.

Entrada	Salida	Prob. de la Salida	Contextos Afectados
a	$c_{M[C[0]]}(\text{ESC})c_{M[C[-1]]}(\text{a})$	$1 \cdot 1/(r+1)$	$M[C[0]] = \{\text{ESC}, 2 \text{ a}, 1\}$
b	$c_{M[\text{a}]}(\text{ESC})c_{M[C[0]]}(\text{ESC})c_{M[C[-1]]}(\text{b})$	$1 \cdot 2/3 \cdot 1/r$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ b}, 1\}$ $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 3 \text{ a}, 1 \text{ b}, 1\}$
a	$c_{M[\text{b}]}(\text{ESC})c_{M[C[0]]}(\text{a})$	$1 \cdot 1/3$	$M[\text{b}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 1\}$ $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 3 \text{ a}, 2 \text{ b}, 1\}$
b	$c_{M[\text{a}]}(\text{b})$	$1/2$	$M[C[\text{a}]] = \{\text{ESC}, 1 \text{ b}, 2\}$
c	$c_{M[\text{b}]}(\text{ESC})c_{M[C[0]]}(\text{ESC})c_{M[C[-1]]}(\text{c})$	$1/2 \cdot 1/4 \cdot 1/(r-1)$	$M[\text{b}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 1 \text{ c}, 1\}$ $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 4 \text{ a}, 2 \text{ b}, 1 \text{ c}, 1\}$
b	$c_{M[\text{c}]}(\text{ESC})c_{M[C[0]]}(\text{b})$	$1 \cdot 1/5$	$M[\text{c}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ b}, 1\}$ $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 4 \text{ a}, 2 \text{ b}, 2 \text{ c}, 1\}$
a	$c_{M[\text{b}]}(\text{a})$	$1/3$	$M[\text{b}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 2 \text{ c}, 1\}$
b	$c_{M[\text{a}]}(\text{b})$	$2/3$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ b}, 3\}$
a	$c_{M[\text{b}]}(\text{a})$	$2/4$	$M[\text{b}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 3 \text{ c}, 1\}$
b	$c_{M[\text{a}]}(\text{b})$	$3/4$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ b}, 4\}$
a	$c_{M[\text{b}]}(\text{a})$	$3/5$	$M[\text{b}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 4 \text{ c}, 1\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{ESC})c_{M[C[0]]}(\text{a})$	$1/5 \cdot 2/4$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 1 \text{ b}, 4\}$ $M[C[0]] = \{\text{ESC}, 4 \text{ a}, 3 \text{ b}, 2 \text{ c}, 1\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{a})$	$1/6$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 2 \text{ b}, 4\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{a})$	$2/7$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 3 \text{ b}, 4\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{a})$	$3/8$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 4 \text{ b}, 4\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{a})$	$4/9$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 5 \text{ b}, 4\}$
a	$c_{M[\text{a}]}(\text{a})$	$5/10$	$M[\text{a}] = \{\text{ESC}, 1 \text{ a}, 6 \text{ b}, 4\}$

Descompresor

1. Idem al paso 1 del compresor.
2. Mientras existan símbolos que descodificar:
 - a) $i \leftarrow k$.
 - b) Mientras el símbolo descodificado sea ESC:
 - 1) $i \leftarrow i - 1$.
 - c) Descodificar s según $p(s|c[i])$.
 - d) Actualizar $p(s|c[i])$.
 - e) Mientras $i < k$:
 - 1) $i \leftarrow i + 1$.
 - 2) Añadir s al contexto para $c[i]$.

Capítulo 8

El estándar JPEG

8.1. Limitaciones de los compresores de texto

- La compresión de texto tiene la ventaja de que es aplicable a cualquier tipo de fuente (imágenes, vídeo, audio, ficheros de datos, etc.) pero las tasas de compresión no son altas. Por ejemplo, para las imágenes es raro alcanzar una tasa 2:1.¹
- Para comprobar esto, vamos a comprimir utilizando diferentes compresores de texto algunas imágenes de prueba. Todas son imágenes de 512×512 puntos y 8 bits/punto.

¹Esta forma de notar la tasa de compresión es siempre $X:1$ siendo

$$X = \frac{\alpha}{\beta},$$

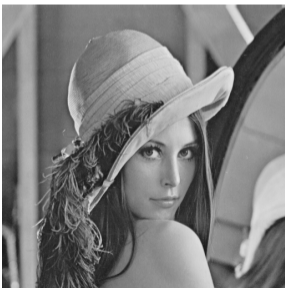
donde α es el tamaño de la secuencia sin comprimir y β es el tamaño de la secuencia comprimida.



barbara



boats



lena



zelda

8.1 Limitaciones de los compresores de texto

- En la siguiente tabla se muestran las tasas de compresión alcanzadas por los distintos algoritmos de compresión de texto estudiados (expresadas en bits/punto), para la batería de imágenes.

Algoritmo	lena	barbara	boats	zelda
RLE MNP-5	8,056	8,040	8,064	8,048
LZ77	7,984	8,264	7,368	8,048
Huffman Adaptativo (orden 0)	7,360	7,400	6,648	7,160
Aritmética Adaptativa (orden 0)	7,280	7,320	6,472	7,056
LZ77+Huffman (gzip -9)	6,808	7,056	6,176	6,680
PPM (Cod. Arit. orden 7)	5,208	6,336	5,280	4,880

Como puede apreciarse, las tasas son en general bastante bajas.

8.2. Fuentes de redundancia en las imágenes

- El que un compresor de texto sea capaz de comprimir una imagen es un indicio fiable de que en ellas existe redundancia estadística.
- Sin embargo, este tipo de redundancia es en realidad consecuencia de la **redundancia espacial**. En una imagen, los puntos vecinos tienden a poseer valores parecidos:



8.3. La compresión de imágenes

- La compresión de imágenes es el proceso mediante el cual una imagen es representada de una forma más compacta.
- Existen dos tipos diferentes de compresores de imágenes: (1) los reversibles o **lossless** y (2) los irreversibles o **lossy**.
- Los del primer tipo permiten alcanzar con un coste computacional inferior al de los compresores de texto niveles de compresión semejantes o ligeramente superiores.
- Los compresores lossy tienen la ventaja de que los niveles de compresión son muy superiores. Esto es posible porque generalmente explotan además de la redundancia espacial, **la redundancia visual**.
- Uno de los mejores ejemplos de compresores de imágenes lossy lo tenemos en el estándar de compresión de imágenes JPEG.

8.4. Una medida de la distorsión (PSNR)

- Para comparar la calidad de las imágenes reconstruidas utilizando un compresor lossy se utilizan medidas de la distorsión provocada.
- Una de las medidas más comunes es la relación señal/ruido pico o PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) que se define como

$$\text{PSNR}[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{(2^b - 1)^2}{\text{MSE}}, \quad (8.1)$$

donde b es la profundidad en bits inicial de los puntos y el MSE (Mean Squared Error) se calcula como

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s[i] - \hat{s}[i])^2, \quad (8.2)$$

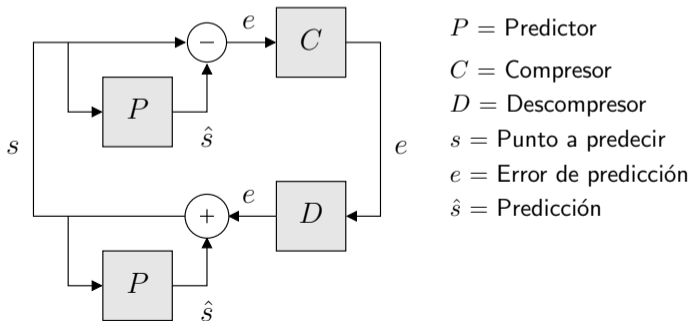
donde N es el número de puntos de las imágenes, $s[i]$ es el i -ésimo ($i = (x, y)$) punto de la imagen $s[\cdot]$ y $\hat{s}[i]$ es el i -ésimo punto de la imagen reconstruida (comprimida y descomprimida).

8.5. El estándar JPEG (ISO/IEC 10918-1)

- JPEG = Joint Photographic Experts Group.
- Creado en 1992 por la ISO [7].
- Imágenes en color (RGB) y en tonos de gris.
- Calidad de compresión seleccionable (0 – 100), aunque no el ratio de compresión [37].
- Reconstrucciones casi sin distorsión a ratios de 1 bpp para imágenes en color.
- Basado en la cuantificación de los coeficientes DCT, aplicada por bloques de 8×8 puntos.
- Otros modos de funcionamiento especiales: lossless y jerárquico.

8.5.1. El algoritmo lossless [26]

- Permite comprimir imágenes de forma totalmente reversible.
- Basado en un predictor espacial y un codificador de longitud variable (codificación de Huffman o aritmética), aunque alimentado con una probabilidades estáticas.
- Su diagrama de bloques es



donde

Contexto de Predicción

a	b
c	\hat{s}

Predictores

P_0	$\hat{s} \leftarrow 0$
P_1	$\hat{s} \leftarrow a$
P_2	$\hat{s} \leftarrow b$
P_3	$\hat{s} \leftarrow c$
P_4	$\hat{s} \leftarrow a + b - c$
P_5	$\hat{s} \leftarrow a + (b - c)/2$
P_6	$\hat{s} \leftarrow b + (a - c)/2$
P_7	$\hat{s} \leftarrow (b + c)/2$

Codec

Compresor:

1. Generar \hat{s} .
2. Calcular el error de predicción $e \leftarrow s - \hat{s}$.
3. Codificar e .

Descompresor:

1. Generar \hat{s} (idéntico al paso 1 del compresor).
2. Decodificar e .
3. Calcular el valor del punto $s \leftarrow e + \hat{s}$.

La compresión de Huffman en LS-JPEG

- El compresor de Huffman utilizado en LS-JPEG utiliza un modelo probabilístico estático (ver tablas a continuación):
 1. Buscar e en $DIFF$ y seleccionar $SSSS$.
 2. Codificar $SSSS$ según el código base.
 3. Si $e > 0$ entonces:
 - a) Codificar e usando un número binario de $SSSS$ bits. El bit más significativo de e va a ser siempre 1.
 4. Si no:
 - a) Codificar $e - 1$ usando un número binario de $SSSS$ bits. El bit más significativo de e va a ser siempre 0.
- Por ejemplo, si $e = 5$, $SSSS = 3$. Emitimos 100 y a continuación 101 usando 3 bits. Si $e = -9$, $SSSS = 4$. Emitimos 101 seguido de los 4 bits menos significativos de -10 (representado en complemento a 2) que son 0110.

Categorías

<i>SSSS</i>	<i>DIFF</i>
0	0
1	-1,1
2	-3,-2,2,3
3	-7,⋯,-4,4,⋯,7
4	-15,⋯,-8,8,⋯,15
5	-31,⋯,-16,16,⋯,31
6	-63,⋯,-32,32,⋯,63
7	-127,⋯,-64,64,⋯,127
8	-255,⋯,-128,128,⋯,255
9	-511,⋯,-256,256,⋯,511
10	-1023,⋯,-512,512,⋯,1023
11	-2047,⋯,-1024,1024,⋯,2048
12	-4095,⋯,-2048,2048,⋯,4095
13	-8191,⋯,-4096,4096,⋯,8191
14	-16383,⋯,-8192,8192,⋯,16383
15	-32767,⋯,-16384,16384,⋯,32767
16	-32768

Códigos de Huffman

<i>SSSS</i>	Longitud	Código base
0	3	00
1	4	010
2	5	011
3	5	100
4	7	101
5	8	110
6	10	1110
7	5	11110
8	6	111110
9	7	1111110
10	8	11111110
11	9	111111110
12	10	1111111110
13	11	11111111110
14	12	111111111110
15	-	1111111111110
16	-	11111111111110

- El algoritmo del descompresor entrópico en LS-JPEG consiste en:
 1. Decodificar la categoría $SSSS$ usando el código base.
 2. $e \leftarrow$ siguientes $SSSS$.
 3. Ahora decodificamos la magnitud. Sea $x \leftarrow$ siguiente bit de entrada.
 4. Si $x \neq 0$ entonces:
 - a) $e \leftarrow 2^{SSSS-1} +$ siguientes $(SSSS - 1)$ bits.
 5. Si no:
 - a) $e \leftarrow (-1) \text{ AND } (2^{SSSS-1} + \text{siguientes } (SSSS - 1) \text{ bits} + 1)$.

Por ejemplo, si el código es 100101, los 3 primeros bits indican que se trata de la categoría $SSSS = 3$. Leemos el siguiente bit de entrada ($x \leftarrow 1$) y como es distinto de cero, llegamos a que $e \leftarrow 2^2 +$ siguientes dos bits de entrada $(01) = 101 = 5$.

Cuando el código es 1010110, los 3 primeros bits indican que $SSSS = 4$. Leemos el siguiente bit de entrada y vemos que es 0. Por tanto

(usando 8 bits de precisión) $e \leftarrow 11111111 \text{ AND } (0000+110+1) = 11110111 = -9$ (los 4 bits más significativos de 0111 se suponen 1).

Evaluación

Veamos cómo se comporta el algoritmo LS-JPEG frente a los compresores de texto.

Algoritmo	lena	barbara	boats	zelda
RLE MNP-5	8,056	8,040	8,064	8,048
LZ77	7,984	8,264	7,368	8,048
Huffman Adaptativo (orden 0)	7,360	7,400	6,648	7,160
Aritmética Adaptativa (orden 0)	7,280	7,320	6,472	7,056
LZ77+Huffman (gzip -9)	6,808	7,056	6,176	6,680
PPM (Cod. Arit. orden 7)	5,208	6,336	5,280	4,880
LS-JPEG (Huffman)	4,240	5,448	4,896	4,384

8.5.2. El algoritmo lossy

Para una imagen RGB, el algoritmo básico consiste en:

1. Convertir la imagen al dominio YCbCr.
2. Submuestrear la crominancia.
3. Desplazar cada componente al rango $[-128, 127]$.
4. Para cada componente (Y, Cb y Cr):
 - a) Aplicar la (8×8) -DCT a cada componente.
 - b) Cuantificar los coeficientes DCT.
 - c) Codificar entrópicamente los coeficientes cuantificados.

8.5.2.1. RGB \rightarrow YCbCr

- JPEG utiliza una aproximación de la transformación de color [29]

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,144 \\ -0,1687 & -0,3313 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4187 & -0,0813 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

que cuando el rango de los valores de entrada es $[0, 255]$ y se utiliza aritmética entera, queda como

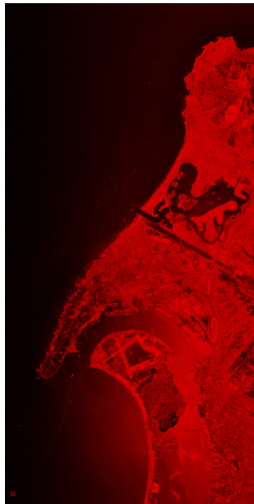
$$\begin{pmatrix} 256 \times Y \\ 256 \times (Cb - 128) \\ 256 \times (Cr - 128) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & 150 & 29 \\ -44 & -67 & 131 \\ 131 & -110 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

- El dominio RGB es generalmente más redundante que el YCbCr (redundancia espectral o redundancia inter-componente).

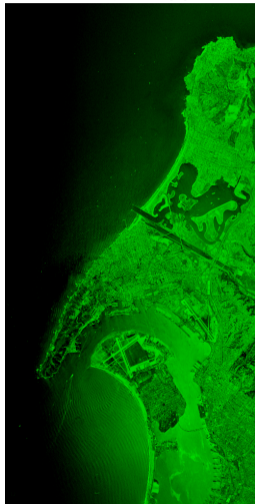
Ejemplo: San Diego (RGB)



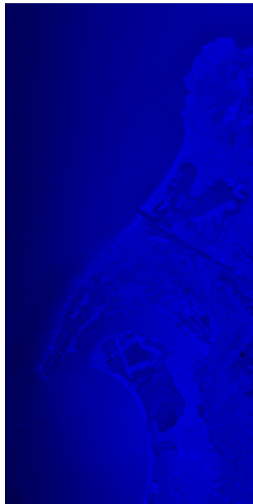
R, 7,51 bpp



G, 6,82 bpp



B, 7,04 bpp



Total = 21,37 bpp

8.5 El estándar JPEG (ISO/IEC 10918-1)

Y, 7,42 bpp



Cb, 6,86 bpp



Cr, 4,51 bpp



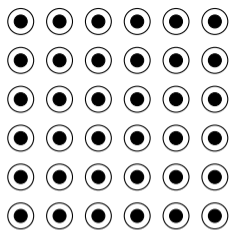
Total = 18,79 bpp

8.5 El estándar JPEG (ISO/IEC 10918-1)

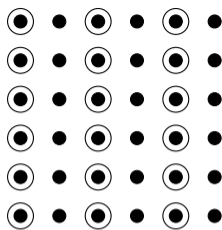
8.5.2.2. Submuestreo de la crominancia

- El sistema visual humano es más sensible a la pérdida de información en la luma que en el croma. Por eso las bandas Cb y Cr se submuestran en una de estas 4 formas:
 1. **Formato 4:4:4.** Las tres componentes se muestrean con la misma frecuencia. Es la que debería aplicarse en aplicaciones *lossless*.
 2. **Formato 4:2:2.** Cada dos muestras de Y (sólo) en horizontal se toma una para Cb y otra para Cr.
 3. **Formato 4:1:1.** Cada cuatro muestras de Y en horizontal se toma una para Cb y otra para Cr.
 4. **Formato 4:2:0.** Cada dos muestras de Y en horizontal y en vertical se toma una para Cb y otra para Cr, pero en los puntos intermedios.

- Ejemplos:

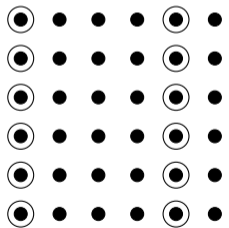


4:4:4



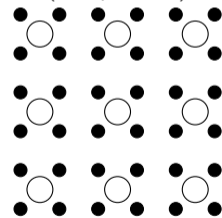
4:2:2

● Luminancia
○ Crominancia



4:1:1

(Interpolación)



4:2:0

8.5.2.3. $[0, 255] \rightarrow [-128, 127]$

- Cada banda (Y, Cb y Cr en el caso de las imágenes en color o sólo Y en el caso de las imágenes en blanco y negro) se chequea para que sus puntos no sean siempre positivos. Si lo son, se resta 128 a cada punto de esa banda.
- Esto se hace para decrementar la precisión aritmética necesaria para calcular la DCT (en concreto, para reducir el rango dinámico de los coeficientes transformados).

8.5.2.4. Aplicar la 2D-DCT por bloques de 8×8 puntos

- Cada componente se procesa por bloques de 8×8 puntos y se le calcula la 2D-DCT (Discrete Cosine Transform). Esta transformada puede calcularse a partir de la DCT gracias a que la 2D-DCT es separable. La DCT se calcula como

$$\text{DCT}[u] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} K(u) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1)\pi u}{2n} \quad (8.5)$$

y su transformada inversa como

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} K(u) \text{DCT}[u] \cos \frac{(2n+1)\pi u}{2n} \quad (8.6)$$

donde N es el número de puntos a transformar y

$$K(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } u = 0 \\ 1 & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

Principales características de la DCT

- **Puede ser rápida:**

Existe un algoritmo rápido de cálculo que se ejecuta en un tiempo proporcional a $N \log_2 N$.

- **Es casi óptima:**

Es muy aproximada a la KLT (Karhunen-Lòeve Transform), una transformada óptima desde el punto de vista de su capacidad para concentrar la máxima cantidad de energía de una señal en un número mínimo de coeficientes, pero que tiene una complejidad de N^2 . Como consecuencia, la DCT acumula en muy pocos coeficientes la mayor parte de la energía de la señal.

- **Es idempotente:**

O lo que es lo mismo, la distancia euclídea es invariante con respecto a la transformación. Esto permite decir que *aquellos coeficientes más grandes en valor absoluto son los que más minimizan el error cuadrático medio (MSE) de la reconstrucción.*

Ventajas de la 2D-DCT por bloques

- **Un menor coste computacional total:**

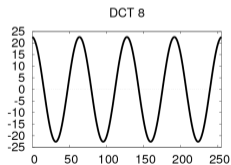
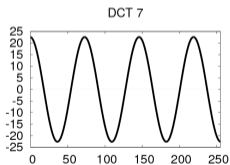
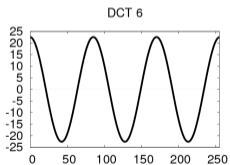
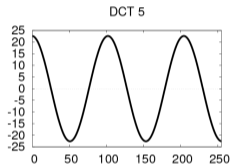
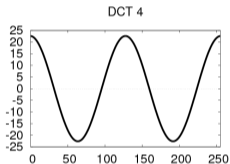
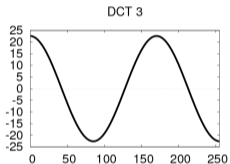
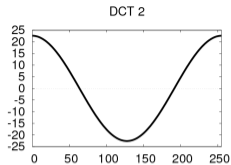
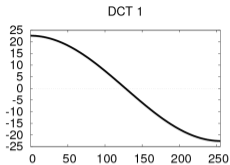
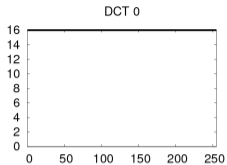
Es más rápido calcular $(\frac{N}{8} \times \frac{N}{8})$ 2D-DCT's de 8×8 puntos que una 2D-DCT de $N \times N$ puntos ya que incluso la complejidad del algoritmo rápido es superior a la lineal ($\mathcal{O}(N)$ frente a $\mathcal{O}(N \log_2 N)$).

- **Posibilidad de operación "in-line":**

Este es un factor determinante cuando las imágenes son muy grandes. El compresor y el descompresor pueden trabajar por bloques de 8×8 puntos independientemente del tamaño de la imagen.

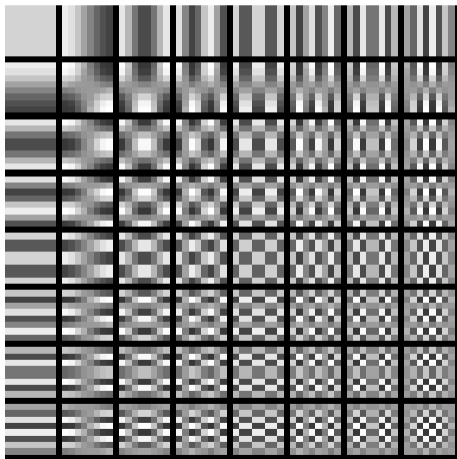
Funciones base DCT

- Es interesante conocer la forma de las funciones base de la DCT porque así podemos hacernos una idea de la correlación espacial explotada y del aspecto de las reconstrucciones.
- Las primeras 9 funciones base de la DCT son:



Funciones base 2D-DCT de 8×8 puntos

- Cada coeficiente de la 2D-DCT de un bloque de 8×8 puntos representa el peso que tienen cada uno de estos 64 patrones a la reconstrucción del bloque.



8.5.2.5. Cuantificación escalar

- El principal objetivo de la 2D-DCT es la compactación espectral. Cuando esto se consigue, muy pocos coeficientes acumulan la mayor parte de la energía.
- Como los coeficientes están muy descorrelacionados se utiliza cuantificación escalar, en lugar de cuantificación vectorial.
- El resultado de la cuantificación es un gran número de coeficientes cuantificados muy próximos o iguales a 0. Su distribución estadística es una Laplaciana.

- La fase de cuantificación es muy importante porque es la principal fuente de pérdida de información. El JPEG estudió el proceso y propuso una matriz de cuantificación para la luminancia y otra para la crominancia.

Luminancia

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Crominancia

17	18	24	47	99	99	99	99
18	21	26	66	99	99	99	99
24	26	56	99	99	99	99	99
47	66	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99

- Como puede verse, se da más peso a las bajas frecuencias que a las altas².

²Aunque en el caso de la luminancia el coeficiente DC no es el más importante.

- Aritméticamente, el proceso de cuantificación consiste en dividir el valor de los coeficientes 2D-DCT entre los coeficientes de cuantificación y redondear al entero más cercano, es decir

$$2\text{D-DCT}'[u, v] = \text{round}\left(\frac{2\text{D-DCT}[u, v]}{Z[u, v]}\right) \quad (8.7)$$

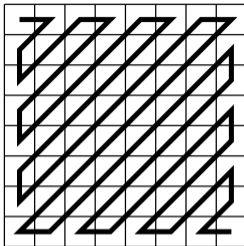
donde $Z[\cdot, \cdot]$ es la matriz de cuantificación.

- El estándar prevee el uso de matrices de cuantificación diseñadas a medida, pero en este caso el compresor debe indicárselas al descompresor.

8.5.2.6. Codificación entrópica

- JPEG utiliza una mezcla entre DPCM, RLE y Huffman para codificar los coeficientes cuantificados.
- Algoritmo:
 1. Restar al coeficiente DC el valor del coeficiente DC del bloque anterior (DPCM). Objetivo: decrementar el rango dinámico del coeficiente DC.
 2. Recorrer los coeficientes en zig-zag tal y como se muestra a continuación:

DC



para encontrar el punto a partir del cual todos los coeficientes son 0. Este evento se señala con un símbolo especial llamado EOB (End Of Block).

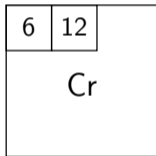
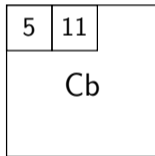
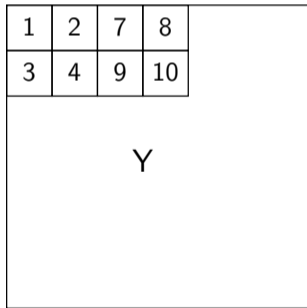
3. Codificar las series de coeficientes nulos (RLE) usando un código de longitud variable (Huffman) estático.³

³El JPEG propuso también el uso de una codificación aritmética pero debido al aumento de la carga computacional de esta etapa y a la ganancia marginal en compresión (aproximadamente un 10% en promedio) rara vez se utiliza.

8.5.2.7. Entrelazamiento de las componentes de color

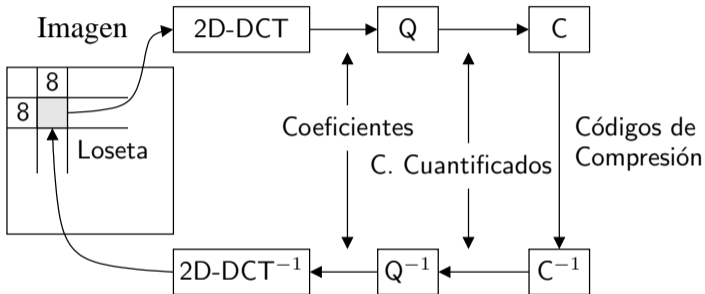
- Típicamente, JPEG utiliza un submuestreo 4:2:0 (véase la Sección 8.5.2.2).
- El entrelazamiento se utiliza para poder reconstruir una imagen en color por filas, conforme vamos leyendo el fichero comprimido.

1. Con entrelazamiento:



Ejemplo

- Vamos a realizar un ejemplo del proceso descrito



utilizando un ejemplo (una imagen en tonos de gris).

Cálculo de la 2D-DCT a un bloque

- El resultado de aplicar la 2D-DCT a un bloque de luminancia de la imagen "lena" es:

79	75	79	82	82	86	94	94
76	78	76	82	83	86	85	94
72	75	67	78	80	78	74	82
74	76	75	75	86	80	81	79
73	70	75	67	78	78	79	85
69	63	68	69	75	78	82	80
76	76	71	71	67	79	80	83
72	77	78	69	75	75	78	78

 \Leftrightarrow

619	-29	8	2	1	-3	0	1
22	-6	-4	0	7	0	-2	-3
11	0	5	-4	-3	4	0	-3
2	-10	5	0	0	7	3	2
6	2	-1	-1	-2	0	0	8
1	2	1	2	0	2	-2	-2
-8	-2	-4	1	2	1	-1	1
-3	1	5	-2	1	-1	1	-3

- Nótese que la mayor parte de la energía se concentra en los alrededores del coeficiente DC.

Cuantificación

619	-29	8	2	1	-3	0	1
22	-6	-4	0	7	0	-2	-3
11	0	5	-4	-3	4	0	-3
2	-10	5	0	0	7	3	2
6	2	-1	-1	-2	0	0	8
1	2	1	2	0	2	-2	-2
-8	-2	-4	1	2	1	-1	1
-3	1	5	-2	1	-1	1	-3

div

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

=

39	-3	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

- Nótese que la mayor parte de la energía de alta frecuencia se ha perdido.

Generación del EOB

- La matriz

39	-3	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

se recorre en zig-zag y se calcula el EOB.

- El resultado es

39 -3 2 1 -1 1 0 0 0 0 0 0 -1 EOB

Codificación entrópica de las series

- **Codificación del coeficiente DC.** Restar el coeficiente DC del bloque anterior para eliminar la componente continua. En nuestro ejemplo: $39 - 34 = 5$. Esta diferencia se codifica como en LS-JPEG (véase la Tabla Categorías de la Sección 8.5.1). El resultado es: 100101.
- **Codificación de los coeficientes AC.** La codificación depende del número de coeficientes AC nulos que los preceden (los coeficientes nulos no se codifican). Por ejemplo, el primer coeficiente AC es -3 y no lo antecede ningún 0. Por ser -3 sabemos (mirando en la Tabla Categorías de la Sección 8.5.1) que la categoría asignada es la 2. Miramos ahora en la Tabla Códigos AC propuesta por JPEG (para la luminancia) y vemos que los dos primeros bits de este código son 01. Los otros dos bits se calculan de la misma forma que para LS-JPEG. La tabla de códigos AC es muy extensa. Aquí sólo se indica la sección inicial que por suerte contiene la entrada “serie 0/categoría 2”.

Códigos AC para JPEG (Luminancia)

Serie/Categoría	Longitud	Código base
0/0	4	1010 (=EOB)
0/1	3	00
0/2	4	01
0/3	6	100
:	:	:
15/10	26	1111 1111 1111 11110

El bit-stream completo generado para la loseta de nuestro ejemplo es:

100101 0100 0110 001 000 001 11110100 1010

Total 35 bits. Esto representa una tasa de compresión de 0,55 bpp o de aproximadamente 15:1.

8.5.2.8. Transmisión progresiva

- Se utiliza cuando se transmiten imágenes JPEG sobre enlaces lentos.
- Existen 3 versiones:

1. Selección espectral progresiva:

- Consiste en entrelazar los coeficientes de los distintos bloques en función de su frecuencia, transmitiendo primero los de menor frecuencia.
- Proporciona a lo sumo 64 scans (pasadas).

2. Selección por planos de bits:

- Consiste en entrelazar los planos de bits de los coeficientes de los distintos bloques, transmitiendo primero los de mayor peso.
- Proporciona a lo sumo 11 scans.

3. Una mezcla de las dos anteriores:

- 64 u 11 pasadas pueden ser insuficientes en aquellos casos donde el tiempo de transmisión sea muy largo y la potencia

computacional del dispositivo de visualización sea alta. Los coeficientes pueden transmitirse por planos de bits, pero seleccionándolos además por bandas de frecuencia (hasta 704 scans).

8.5.3. El algoritmo jerárquico

- Se basa en construir una pirámide diferencial y aplicar a cada imagen de la pirámide uno de los tres métodos anteriores.
- Algoritmo de construcción de la pirámide diferencial consiste en:
 1. Submuestrear (filtrando previamente) la imagen en un factor de 2 en cada dimensión.
 2. Interpolar la imagen submuestreada en un factor de 2 en cada dimensión.
 3. Restar ambas imágenes, obteniendo la base de la pirámide (altas frecuencias). Nótese que sumando la imagen diferencia y la imagen submuestreada (e interpolada) podemos recuperar la imagen original.
 4. Repetir el proceso con la imagen submuestreada tantas veces como se desee (o sea posible).

8.6. Evaluación

A continuación mostramos una comparativa visual de la compresión de la imagen “lena” (512×512 puntos, $8 + 8 + 8$ bits/punto) mediante el algoritmo JPEG (lossy) no progresivo.

Lena 512 × 512 RGB original



Lena a 1,0 bpp (32,85 dB)



Lena a 0,5 bpp (30,91 dB)



Lena a 0,4 bpp (30,09 dB)



Lena a 0,3 bpp (28,97 dB)



Lena a 0,2 bpp (26,64 dB)



Lena a 0,1 bpp (21,29 dB)



Capítulo 9

El estándar MPEG-1 Vídeo

9.1. Tasas de datos y de compresión

- Las secuencias de vídeo digital en formato PCM ocupan mucha memoria. Un segundo de vídeo en color, a una resolución de 640×480 puntos/imagen y 25 imágenes/segundo necesita:

$$25 \frac{\text{imágenes}}{\text{segundo}} \times 640 \cdot 480 \frac{\text{puntos}}{\text{imagen}} \times 24 \frac{\text{bits}}{\text{punto}} = 184.320.000 \frac{\text{bits}}{\text{segundo}}$$

Esto significa que, por ejemplo, una hora de dicho vídeo ocupa:

$$184.320.000 \frac{\text{bits}}{\text{segundo}} \times 3.600 \frac{\text{segundos}}{\text{hora}} \times \frac{1 \text{ G}}{1.024^3} \times \frac{1 \text{ byte}}{8 \text{ bits}} \approx 77 \text{ Gbytes}$$

- MPEG-1 (Moving Picture Experts Group) comprime una secuencia como la anterior sin una pérdida aparente de calidad a una tasa de bits típica igual a la de un reproductor de CD audio:

$$(16 + 16) \frac{\text{bits}}{\text{muestra}} \times 44.100 \frac{\text{muestras}}{\text{segundo}} = 1.411.200 \frac{\text{bits}}{\text{segundo}}$$

Por tanto, la ganancia en compresión es aproximadamente (para este ejemplo en concreto) 180:1.

9.2. Las fuentes de redundancia

- Los compresores de vídeo alcanzan tales tasas de compresión eliminando la gran cantidad de redundancia que existe en una secuencia de vídeo en formato PCM:
 1. La **redundancia espacial** que es idéntica a la que aparece en las imágenes. Se debe fundamentalmente a que los puntos vecinos tienden a tener valores parecidos. También está provocada porque en las imágenes es común encontrar patrones (texturas) que se repiten en diferentes partes de la imagen con una gran similitud.
 2. La **redundancia temporal** que es propia de las secuencias de vídeo. En una secuencia de vídeo, las imágenes vecinas (en el tiempo) tienden a ser muy parecidas. Por tanto, una forma eficiente de codificarlas es indicar una de ellas, y el resto mediante las diferencias con respecto a esta.

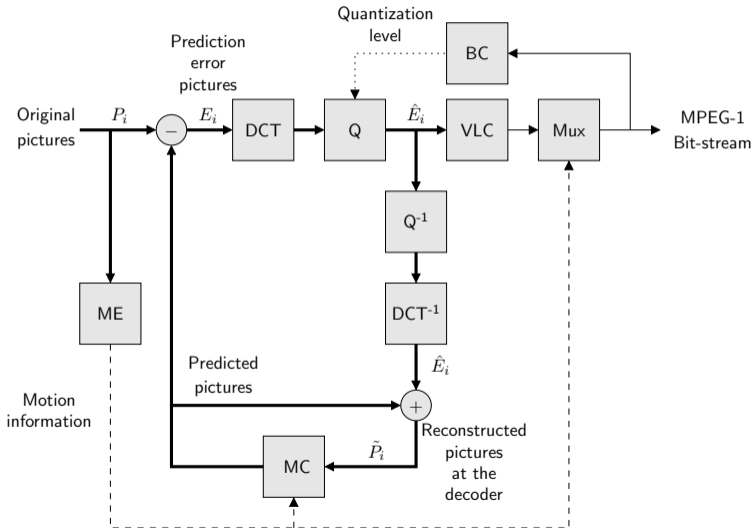
9.3. Eliminación de la redundancia

- MPEG-1 usa básicamente dos técnicas para eliminar la redundancia temporal y espacial:
 1. La **descorrelación espacial** que se utiliza para eliminar la redundancia espacial generada porque los puntos vecinos están correlacionados en valor. Se utilizan técnicas de codificación semejantes a las de JPEG.
 2. La **estimación y compensación de movimiento** que se emplea para eliminar la redundancia temporal. La estimación realiza (como su nombre indica) una estimación del movimiento de los objetos presentes en la escena del vídeo. La compensación realiza una predicción con dicha estimación. Esta predicción finalmente se resta a la imagen predicha para generar una imagen residuo (de menor entropía) más fácil de comprimir usando un compresor de imágenes (como JPEG).

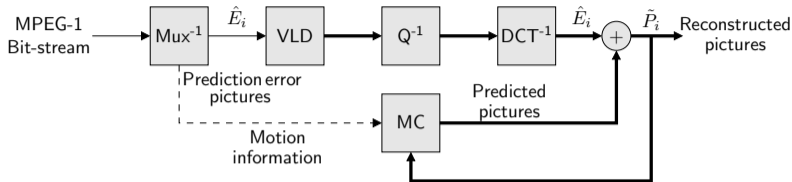
9.4. El codec MPEG-1

- El estándar MPEG-1 (formalmente llamado “Coding of moving pictures and associated audio for digital storage media at up to about 1,5 Mbit/s” o “estándar ISO/IEC 11172”) define cómo debe descomprimirse un bit-stream MPEG-1, no cómo debe comprimirse (aunque sí que aporta una propuesta) [24].
- Otros parámetros importantes del estándar son:
 1. Horizontal picture size ≤ 768 points (best 352).
 2. Vertical picture size ≤ 576 points (best 288).
 3. Picture rate = 23,976, 24, 25, 29,97, 30, 50, 59,95 y 60 Hz.
 4. Bit rate $\leq 1.856.000$ bps.
 5. Chrominance sub-sampling: Default 4:2:0 (Y,Cb,Cr).

■ Diagrama de bloques del compresor:



- Diagrama de bloques del descompresor:



- Nótese que el codec queda descrito por las siguientes recurrencias:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= \text{DCT}^{-1}(\text{Q}^{-1}(\hat{E}_i)) + \text{MC}(\tilde{P}_{i-1}); \text{ con } i > 0 \text{ donde} \\ \hat{E}_i &= \text{Q}(\text{DCT}(P_i - \text{MC}(\tilde{P}_{i-1}))) \text{ siendo} \\ \text{MC}(\tilde{P}_0) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

La imagen $\mathbf{0}$ representa una imagen donde todos sus puntos son 0. El subíndice i , recorre la secuencia que no necesariamente tiene que estar ordenada en el tiempo.

9.5. Las etapas DCT, Q, BC y VLC

- MPEG-1 utiliza básicamente las mismas técnicas que JPEG para comprimir las imágenes residuo:
 - **DCT (Discrete Cosine Transform):** es la 2D-DCT y elimina la correlación espacial por bloques de 8×8 puntos.
 - **Q (Quantization):** básicamente elimina los planos de bits menos significativos de los coeficientes DCT. En ellos tiende a acumularse el ruido de las imágenes y además contienen información visualmente poco relevante.
 - **VLC (Variable Length Coding):** al igual que en JPEG, los coeficientes DCT cuantificados se recorren en zig-zag y se comprimen usando un código estático de Huffman.
- La cantidad de información eliminada por Q depende del bit-rate de salida y del deseado por el usuario. La etapa **BC (Bit-rate Control)** se encarga de que a la salida no se generen más datos de los permitidos.

9.6. La etapa ME

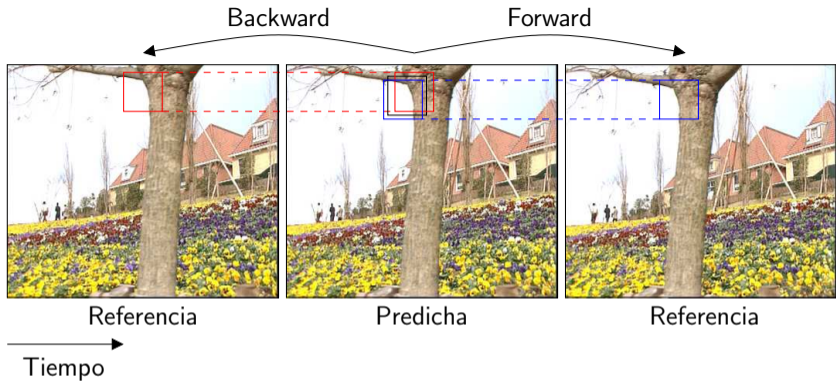
- Debido a su sencillez y eficiencia, la *estimación de movimiento* o ME (*Motion Estimation*) es la técnica más utilizada (no sólo en MPEG-1) para reducir la redundancia temporal en las secuencias de vídeo digitales.
- Sólo se realiza en el compresor porque, como veremos, es un proceso costoso en términos de operaciones aritméticas. Esto responde a la necesidad de “comprimir una vez, descomprimir muchas”.

9.6.1. Imágenes de referencia, predicción y predicha

- ME se basa en que una imagen de la secuencia (*imagen predicha*) puede codificarse a partir de otra (*imagen de referencia*) con muy poco error si somos capaces de encontrar una proyección (*imagen predicción*) de la imagen de referencia que se asemeje mucho a la imagen predicha.

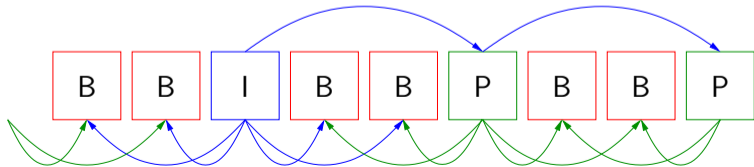
9.6.2. Estimación hacia delante, hacia detrás y bi-direccional

- Dependiendo de la posición relativa (en el tiempo) de la(s) imagen(es) de referencia y de la imagen predicha, hablaremos de:
 1. **Predicción hacia delante (forward)**: cuando la imagen de referencia es posterior a la imagen predicha.
 2. **Predicción hacia detrás (backward)**: cuando la imagen de referencia es anterior a la imagen predicha.
 3. **Predicción bi-direccional (bi-directional)**: cuando la imagen predicha está entre dos imágenes de referencia.



9.6.3. Imágenes I, P y B

- Dependiendo de la forma en que se estima una imagen, MPEG-1 distingue entre:
 1. **I-pictures (Intra-coded)**: si la imagen no es estimada a partir de ninguna otra.
 2. **P-pictures (Predictive-coded)**: si la imagen es estimada a partir de UNA imagen de predicción I o P, anteriores en el tiempo.
 3. **B-pictures (Bidirectionally predictive-coded)**: cuando la imagen predicción se genera a partir de dos imágenes de referencia I o P, necesariamente una anterior y otra posterior. Las imágenes B nunca se toman como imágenes de referencia.



9.6.4. El GOP (Group Of Pictures)

- En MPEG-1, un GOP es un conjunto de imágenes que son continuas en el tiempo. Se cumple que:
 1. Todo GOP debe poseer al menos una imagen de tipo I. Estas imágenes suelen colocarse periódicamente en el tiempo (aproximadamente cada 0,5 segundos), y generalmente es la primera del GOP.
 2. Su longitud no está limitado (excepto por el número de imágenes de la secuencia). Sin embargo, tamaños superiores a 16 no son frecuentes para facilitar el acceso aleatorio y el control de errores en el bit-stream.
 3. Su composición, en términos de imágenes I, P y B, puede cambiar a lo largo de la secuencia comprimida. El MPEG aconseja que ocurran 1 I-picture por cada 3 P-pictures y de 2 a 5 B-pictures por cada P-picture.

4. Puede existir más de una imagen I por GOP.

5. Algunos ejemplos de GOP¹:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
-----> time

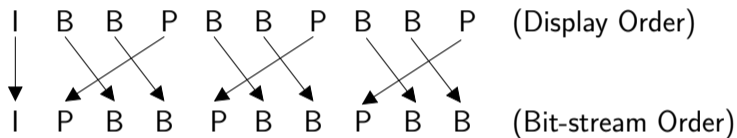
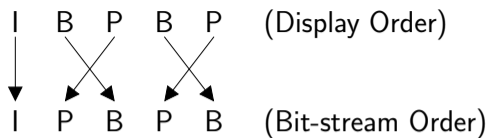
I
I P P
I B P B P
B B I B P B P
B B I B B P B B P B B P
B I B B B B P B I B B I I
I B B P B B P B B P B B P
B B I B B P B B P B B P B B P

```

¹Siempre en “display order”.

9.6.5. Display (time) and bit-stream orders

- Cuando existen imágenes de tipo B en un GOP, en MPEG-1 se habla de dos tipos de ordenación de imágenes:
 1. **Display order:** es aquel en el que las imágenes necesitan ser mostradas en el visualizador. Ningún GOP en este orden puede comenzar en un P-picture o acabar en un B-picture.
 2. **Bit-stream order:** es aquel en el que las imágenes necesitan ser colocadas en el bit-stream. En este se cumple que todo GOP comienza por un I-picture.
- Estas ordenaciones son diferentes sólo cuando aparecen imágenes B. Esto es así porque como estas imágenes dependen de la siguiente I o P (en display order), dicha imagen I o P debe ser transmitida antes que la B.



9.6.6. GOP's abiertos y cerrados

- En MPEG-1 se habla de:
 1. **GOP cerrado (closed)** cuando puede descodificarse (y visualizarse) de forma independiente a cualquier otro GOP. En display order, los GOP's cerrados comienzan necesariamente por un I-picture.
 2. **GOP abierto (open)** cuando necesita el GOP anterior para descodificarse. Los GOP's abiertos comienzan siempre en un B-picture, en display order. Estos GOP's son muy raros porque no permiten el acceso aleatorio ni la acotación de los errores en el tiempo.

I B B P B B P B B P B B P (closed GOP)
B B I B B P B B P B B P B B P (open GOP)

9.6.7. Estimación de movimiento basada en la búsqueda de bloques

- En MPEG-1 se utiliza una técnica de estimación de movimiento llamada *búsqueda de bloques* (block matching) que consiste en dividir la imagen de referencia² en bloques y en encontrar dónde se sitúan en la imagen predicha. MPEG-1 denota a los bloques *macrobloques* (*macroblocks*). Estos son siempre disjuntos y de un tamaño de 16×16 puntos.
- Asociado a cada macrobloque hay un vector de movimiento que indica a dónde se ha desplazado el macrobloque en la imagen predicha.
- Existen otros particionamientos de las imágenes por triángulos, objetos, puntos, ... Sin embargo estas técnicas son menos usadas por su mayor coste computacional.

²Nótese que también hubiera podido dividirse la imagen predicha.

- En la estimación de movimiento se puede utilizar una precisión de 1 punto o de 1/2 de punto. En este caso, tanto el macrobloque de referencia como el predicho deben interpolarse según:

A	X_1	B	$X_1 = (A + B)/2$
X_2	X_3	X_4	$X_2 = (A + C)/2$
C	X_5	D	$X_3 = (A + B + C + D)/4$

9.6.8. Matching criteria

- MPEG-1 propone para saber cómo de parecidos son dos macrobloques a y b , las siguientes medidas:

1. **El error cuadrático medio:**

$$\frac{1}{16 \times 16} \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} (a_{ij} - b_{ij})^2$$

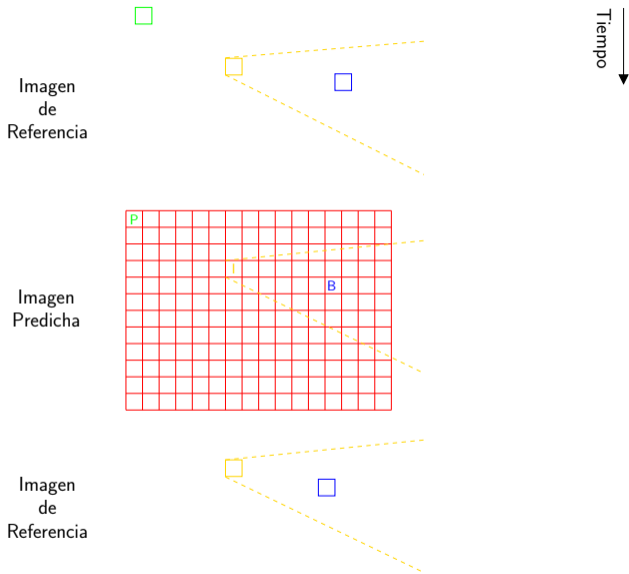
2. **El error absoluto medio:**

$$\frac{1}{16 \times 16} \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} |a_{ij} - b_{ij}|$$

- Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esto es únicamente usado por el compresor y éste no está estandarizado. Por tanto, cualquier otra medida (como la varianza o la entropía del macrobloque residuo) podría ser utilizada.

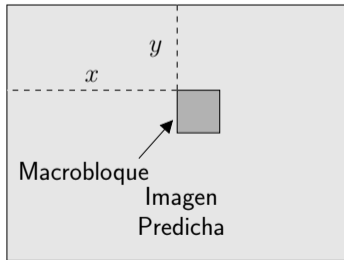
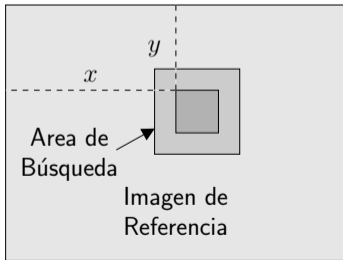
9.6.9. Tipos de macrobloques

- Dependiendo del parecido que existe entre los bloques predicción y predichos, MPEG-1 distingue entre cuatro tipos de macrobloques:
 1. **Macrobloques I:** aquellos que no se predicen porque no existe una suficiente similitud entre bloques. Se encuentran en las imágenes I, P y B.
 2. **Macrobloques P:** son los que se predicen a partir de una imagen I o P, anterior o posterior. Se encuentran en las imágenes P y B.
 3. **Macrobloques B:** los que se predicen a partir de dos imágenes I o P, simultáneamente. Sólo se encuentran en las imágenes B. El macrobloque predicción se calcula como la media aritmética punto a punto de ambas predicciones (la backward y la forward).
 4. **Macrobloques S (Skipped):** cuando el error de predicción es muy pequeño, el compresor no envía residuo. Los macrobloques S pueden aparecer en las imágenes P y B.



9.6.10. Estrategias de búsqueda

- En MPEG-1 se proponen una serie de algoritmos de búsqueda de bloques que poseen diferentes demandas computacionales y resultados:
 1. **Full search (búsqueda exhaustiva):** consiste en buscar el macrobloque de referencia por todo el área de búsqueda y en quedarnos con la mejor coincidencia. Ventaja: optimalidad. Desventaja: muy costoso, especialmente cuando el área de búsqueda es grande.



2. **Logarithmic search:** es semejante a la búsqueda exhaustiva, excepto porque se realiza con versiones submuestreadas del macrobloque de referencia y del área de búsqueda. Inicialmente se utiliza una versión que involucra a muy pocos puntos y cuando se obtiene la mejor coincidencia, se duplica el muestreo y se busca en las proximidades de la última coincidencia. Este proceso continúa hasta alcanzar la resolución original o $1/2$ puntos.
3. **Telescopic search:** consiste en usar los vectores de movimiento calculados para las imágenes vecinas (en el tiempo) para restringir el área de búsqueda. Esto suele funcionar bastante bien porque los campos de movimiento vecinos tienden a estar bastante correlacionados.

9.7. La etapa MC

- La *compensación de movimiento* o MC (*Motion Compensation*) es el proceso de generar la imagen predicción a partir de la información de movimiento (generalmente en forma de vectores de movimiento). Dicha imagen debería ser muy parecida a la imagen predicha.
- Para generar la predicción, en MPEG-1 se utilizan las imágenes de referencia que tiene el descompresor y los campos de movimiento que indican el desplazamiento relativo de cada macrobloque de la imagen predicha en las imágenes de referencia.

9.8. Codificación de los campos de movimiento

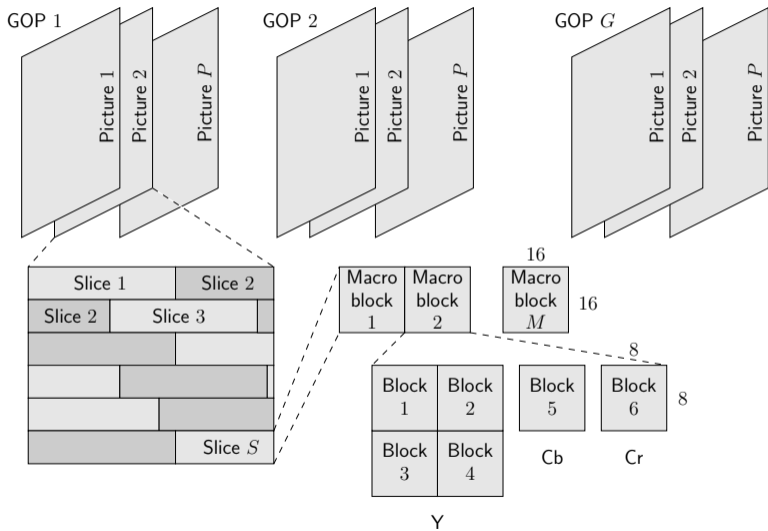
- MPEG-1 codifica los campos de movimiento (pares de coordenadas (x, y)) mediante un código de Huffman estático.
- La distribución de los valores x e y sigue una distribución de Laplace centrada en el valor 0. Esto es así porque en general los desplazamientos de los macrobloques entre imágenes adyacentes suelen ser bastante pequeños.
- El estándar no contempla desplazamientos superiores a 16 puntos:

Motion VLC code	offset
0000 0011 001	-16
0000 0011 011	-15
0000 0011 101	-14
0000 0011 111	-13
0000 0100 001	-12
0000 0100 011	-11

0000	0100	11	-10
0000	0101	01	-9
0000	0101	11	-8
0000	0111		-7
0000	1001		-6
0000	1011		-5
0000	111		-4
0001	1		-3
0011			-2
011			-1
1			0
010			1
0010			2
0001	0		3
0000	110		4
0000	1010		5

0000	1000		6
0000	0110		7
0000	0101	10	8
0000	0101	00	9
0000	0100	10	10
0000	0100	010	11
0000	0100	000	12
0000	0011	110	13
0000	0011	100	14
0000	0011	010	15
0000	0011	000	16

9.9. The MPEG-1's data partitioning



- Cada slice está identificado en el bit-stream con un código de comienzo. Así, cuando el descompresor “pierde el hilo” de la decodificación debido a un error en el bit-stream, se puede sincronizar en el siguiente slice. De esta manera, un error en un bit no afecta a un Picture o a un GOP completo, sino a un slice.
- El tamaño mínimo de un slice puede ser un macrobloque y el tamaño máximo el de un picture.

9.10. Visualización rápida

- MPEG-1 contempla un tipo especial de I-pictures llamadas D-pictures en las que sólo existen información sobre el coeficiente DC de las imágenes residuo. Estas imágenes se descomprimen muy rápidamente³ y es posible realizar una visualización rápida hacia delante y hacia detrás de la secuencia comprimida.
- Las D-pictures son imágenes extra insertadas en el bit-stream y por tanto aumentan la tasa de bits. Por este motivo y porque a partir de una imagen I (con algo más de trabajo) se puede obtener el mismo resultado, su uso es bastante infrecuente.

³No hay que realizar la DCT^{-1} porque el coeficiente DC es la media del bloque.

9.11. Evaluación

- A continuación se presenta una comparativa visual de la compresión de una secuencia de vídeo llamada “Coastguard”. En total son 300 imágenes a una resolución de 352×288 puntos (CIF: Common Interchange Format), en color formato YUV 4:2:0. El picture-rate es de 30 imágenes por segundo.
- Los parámetros de compresión son:
 1. 12 imágenes por GOP.
 2. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: secuencia original, compresión a 1.000 kbps, compresión a 768 kbps y compresión a 512 kbps.
- Púlsese [aquí](#) para ver el vídeo comparativo.⁴

⁴Debe tenerse instalado el programa MPlayer [35].

Bibliografía

- [1] Acústica. <http://www3.labc.usb.ve/EC4514/AUDIO-INTRODUCCION/Introduccion.html>.
- [2] Astrosuft. <http://www.astrosurf.com/astrocaza/Opticas.html>.
- [3] Astrosuft. <http://www.astrosurf.com/astronosur/telescopios1.htm>.

- [4] Audio compression. <http://www.cs.sfu.ca/undergrad-/CourseMaterials/CMPT479/material/notes/Chap4/Chap4.3-/Chap4.3.html>.
- [5] Cidse - curso geometría. <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/SUPERIOR/t1-conicas/2-Parabola/index.html>.
- [6] European HDTV Channel. <http://www.euro1080.tv>.
- [7] *Recommendation T.81: Digital Compression and Coding of Continuous-tone Still Images.*
- [8] Totoexpertos - cálculo de la longitud de la parábola. <http://www.todoexpertos.com/categorias/ciencias-e-ingenieria/matematicas/respuestas/1341850/calculo-de-la-longitud-de-la-parabola>.
- [9] Wikipedia - escala de sensibilidad fotográfica. [http://es.wikipedia.org/wiki/Escala_de_sensibilidad_fotográfica](http://es.wikipedia.org/wiki/Escala_de_sensibilidad_fotografica).
- [10] Wikipedia - la película fotográfica. [http://es.wikipedia.org/wiki/Película_fotográfica](http://es.wikipedia.org/wiki/Pel%C3%ADcula_fotografica).

- [11] Wikipedia - la profundidad de campo.
http://es.wikipedia.org/wiki/Profundidad_de_campo.
- [12] Wikipedia - telescopio maksutov. <http://en.wikipedia.org/wiki/Maksutov>.
- [13] Wikipedia - telescopio schmidt-cassegrain.
<http://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt-Cassegrain>.
- [14] Adam Barratt. DTS, Dolby Digital and DVD: A History.
<http://home.clear.net.nz/pages/adbarr/page1.html>.
- [15] J.G. Cleary and I.H. Witten. Data Compression using Adaptive Coding and Partial String Matching. *IEEE Transactions on Communications*, 4(32):396–402, 1984.
- [16] CompuServe Incorporated. *Graphics Interchange Format (GIF) Specification*, June 1987.
- [17] Michael Demtschyna. PAL vs NTSC or, Which DVD Do I Buy?
<http://www.michaeldvd.com.au/Articles/PALvsNTSC/PALvsNTSC.asp>.

- [18] Esteban Dueñas. Sonido Básico 1. <http://www.cinesonido.com/tecnologia/sonidobasico1/index.html>.
- [19] Udara Fernando. MP3 Compression. <http://www.stanford.edu/udara/SOCO/lossy/mp3/concept.htm>.
- [20] R.C. Gonzalez and R.E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison Wesley, 1992.
- [21] D. Hamaker. Compress and Compact Discussed Further. *Commun. ACM*, 31:1139–1140, 1988.
- [22] G. Held. *Data and Image Compression*. Willey, 1996.
- [23] D.A. Huffman. A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 40:1098–1101, 1952.
- [24] International Standards Organisation (ISO) and the International Electrotechnical Commission (IEC). *MPEG-1 (ISO/IEC 11172)*, 1992.

- [25] International Standards Organisation (ISO) and the International Electrotechnical Commission (IEC). *MPEG-2 (ISO/IEC 13818)*, 1994.
- [26] The Joint Photographic Experts Group (JPEG). *FCD 14495, Lossless and Near-Lossless Coding of Continuous Tone Still Images (JPEG-LS)*. The International Standards Organization (ISO)/The International Telegraph and Telephone Consultative Committee (CCITT), July 1997.
- [27] B.P. Lathi. *Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación*. Limusa Noriega Editores, 1994.
- [28] Daniel Maggiolo. *Acústica Musical*. <http://www.eumus.edu.uy/docentes/maggiolo/acuapu/>.
- [29] A.M. Marcos. *Compresión de imágenes. Norma JPEG*. Editorial Ciencia 3, 1999.
- [30] A.V. Oppenheim and R.W. Shafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.

- [31] A.V. Oppenheim, R.W. Shafer, and J.R. Buck. *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto*. Prentice Hall, 2 edition, 2000.
- [32] David "Pixel Inquieto" Pérez, M^a Teresa "Navigator" Márquez, David "Last Update" Travieso, Álvaro Crazy Frame-Magano, and Alfonso "Intel Inside" López. Percepción visual. http://www.uam.es/personal_pdi/psicologia/travieso/web_percepcion/pri
- [33] K.R. Rao and J.J Hwang. *Techniques and Standards for Image, Vídeo and Audio Coding*. Prentice Hall, 1996.
- [34] Mike Smyth and Stephen Smyth. DTS Coherent Acoustics. The Future Of Audio Part Two: The Sonics Of Bit Rate Reduction. <http://www.surroundmusic.net/articles/dtsco2.html>.
- [35] MPlayer Team. <http://www.mplayerhq.hu>.
- [36] Kyoya Tsutsui, Hiroshi Suzuki, Osamu Shimoyoshi, Mito Sonohara, Kenzo Akagiri, and Robert M. Heddle. ATRAC: Adaptive Transform Acoustic Coding for MiniDisc. http://www.minidisc.org/aes_atrac.html.

- [37] G.K. Wallace. The JPEG Still Picture Compression Standard. *Commun. ACM*, 34(4):30–40, 1991.
- [38] T.A. Welch. A Technique for High-Performance Data Compression. *IEEE Computer*, pages 8–19, 1984.
- [39] J. Ziv and A. Lempel. A Universal Algorithm for Sequential Data Compression. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 23(3):337–343, 1977.
- [40] J. Ziv and A. Lempel. Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 24(5):530–536, 1978.